Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

VII Semana da Matemática
10 anos do PPGMAT

O PODER DO TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT: A IMPORTANTE INTEGRAL DE FRESNEL

DA SILVA, Thiago Felipe (Bolsista PET Matemática - UFCG); DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro (Orientador)
Universidade Federal de Campina Grande
thiagof@dme.ufcg.edu.br; daniel@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

O que é uma integral de Fresnel e como podemos calculá-la?

Nascido em Broglie no sul da França, Augustin Fresnel (foto) (1788-1827) foi físico, engenheiro civil por profissão e um exímio matemático por vocação. Fresnel deixou grandes contribuições em diversos campos das ciências exatas. Dentre elas, as mais importantes foram as integrais de Fresnel na matemática, nas construções da engenharia civil e, além disso, ficou conhecido como o pai da ótica moderna pela sua teoria da *onda de luz*.

A integral de Fresnel que estudaremos aparece, por exemplo, em diversas áreas de estudo da física.

Neste trabalho, daremos ênfase ao cálculo destas integrais, usando como principal ferramenta o poderoso Teorema de Cauchy-Goursat.

OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo apresentar as integrais de Fresnel, bem como sua importância e suas aplicações em outros ramos das ciências. Daremos ênfase sobretudo, ao cálculo dessas integrais, apresentada logo abaixo,:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$$

METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho, foram realizadas leituras e pesquisas em livros e também artigos publicados em revistas matemáticas. Além disso, houve ainda reuniões com o professor orientador para apresentação e discussão do assunto.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Teorema de Clauchy-Goursat: Seja $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica sobre uma região $\mathcal{R}$ e sobre sua fronteira C. Então,

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Usaremos o teorema de Cauchy-Goursat para provar que

$$\int_0^\infty cosx^2dx = \int_0^\infty senx^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

APLICAÇÕES

Os integrandos das integrais de Fresnel formam as equações paramétricas da Espiral de Cornu (figura 1). Esta curva por sua vez possui a seguinte propriedade: Seu raio de curvatura varia linearmente ao longo de seu comprimento. A figura 2 mostra numa experiência o surgimento de um ramo da 'espiral de Cornu' com apenas um ponto de osculação.

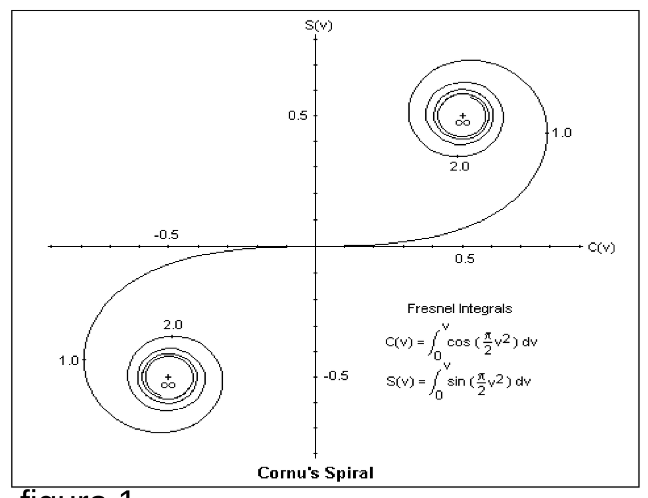

figura 1

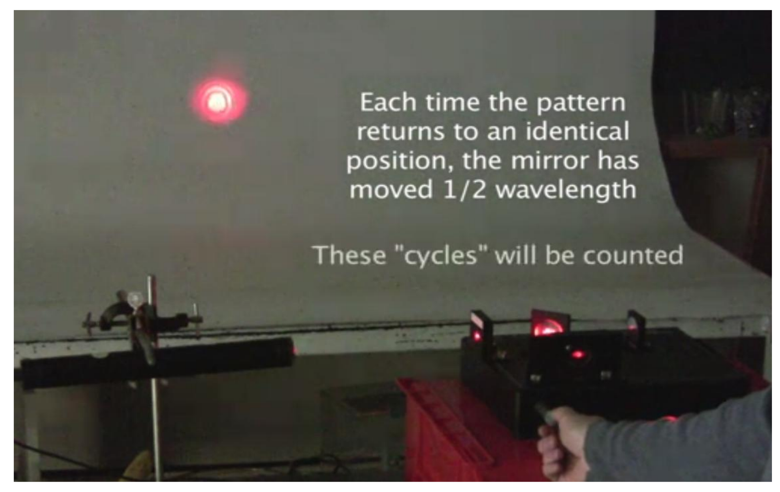

figura 2

Cálculos das integrais de Fresnel:

Considere a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^{iz^2}$$

Considere ainda o contorno C indicado na figura 3. Como f é uma função analítica em todo o plano complexo, e em particular sobre C, segue do teorema de Cauchy-Goursat que

$$\int_C e^{iz^2}dz = 0\,.$$

Observe agora que

$$(1)\quad \int_C e^{iz^2}dz = \int_{OA} e^{iz^2}dz + \int_{AB} e^{iz^2}dz + \int_{BO} e^{iz^2}dz = 0$$

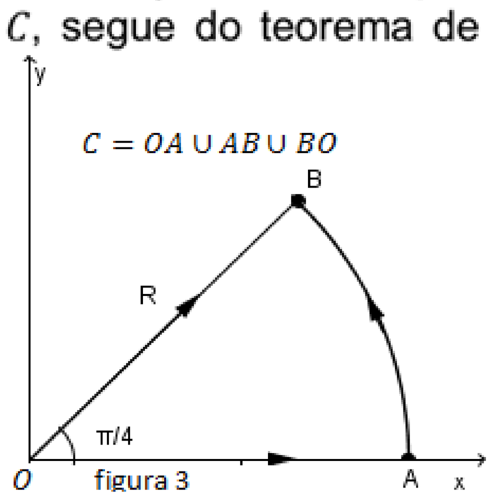

figura 3

Usando as parametrizações adequadas para z sobre cada caminho indicado na figura 3 podemos passar das últimas três integrais em (1) às respectivas integrais

$$\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta + \int_R^o e^{ir^2e^{\frac{i\pi}{2}}}e^{\frac{i\pi}{4}}dr = 0\,. \qquad (2)$$

Segue de (2) que

$$\int_0^R (cosx^2 + isenx^2)dx = e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-r^2}dr - \int_0^{\pi/4} e^{iR^2cos2\theta - R^2sen2\theta}iRe^{i\theta}d\theta \quad (3)$$

Provemos agora que a última integral em (3) tende para zero quando $R \to \infty$.

$$(4)\quad \left|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2cos2\theta - R^2sen\theta}iRe^{i\theta}d\theta\right| \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2sen\varphi}d\varphi \le \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2\varphi}{\pi}}d\varphi = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right).$$

E portanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/4} e^{iR^2cos2\theta - R^2sen\theta}iRe^{i\theta}d\theta = 0. \qquad (5)$$

Em (4) usamos a transformação $2\theta = \varphi$, juntamente com o fato de $sen\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$, para todo $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Notemos agora que, usando (5) e o fato de $\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (vide [2] pag. 163). Com algumas manipulações rotineiras chegamos à

$$\int_0^\infty (cosx^2 + isenx^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \qquad (6)$$

Por último, igualando as partes real e imaginária, respectivamente, em (6) chegamos ao resultado procurando que é

$$\int_0^\infty cosx^2dx = \int_0^\infty senx^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

REFERÊNCIAS

[1] RUEL V. CHURCHIILL.: Variáveis Complexas e suas Aplicações, Ed. McGraw-Hill, 1975.
[2] Ávila, G.: Funções de uma Variável Complexa. LTC Editora, 1977.
[3]SOMMERFELD, A.: Optics. Academic Press