UMA DEMONSTRAÇÃO ELEMENTAR DA TRANSCENDÊNCIA DO NÚMERO *e*

CAVALCANTE, F. B.[1]; DA SILVA, T. F.[1]; DE MENESES, J. P. F.[1]
DE MORAIS FILHO, D. C[2].(Orientador); DE SOUSA, T. A.[1]

Universidade Federal de Campina Grande
felipeb@dme.ufcg.edu.br; thiagof@dme.ufcg.edu.br;
jpaulo.fm@gmail.com; daniel@dme.ufcg.edu.br; tiagoalves@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Uma das constantes mais famosas e conhecidas da Matemática é a chamada *Constante de Euler* (e), base dos logaritmos naturais. Esse número aparece em diversas aplicações da Matemática e também tem uma enorme importância dentro da própria Matemática. Essa constante possui várias propriedades interessantes, e algumas delas, como por exemplo, a de que é um número irracional, é conhecida desde o Ensino Médio. Dentre essas propriedades, uma pergunta que pode ser levantada é: e é um número transcendente?

Dizemos que um número é ***transcendente*** quando ele não for ***algébrico***, isto é, quando não é raiz de um polinômio de coeficientes inteiros (ou racionais). A título de exemplo, o número $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é raiz de $p(x) = x^2 - 2$, por sua vez, o número π é um número transcendente [1].

Em 1873, o matemático francês Charles Hermite (1822-1901) demonstrou pela primeira vez a transcendência de e [2]. Neste trabalho, apresentaremos uma outra demonstração desse fato. Como consequência disto, o número e não pode ser escrito como uma combinação de potências de números racionais.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Para demonstrar que e é um número transcendente, suponhamos, por contradição, que ele seja algébrico, isto é, que existam números inteiros $a_0, a_1, \dots, a_n$ com $a_0 \neq 0$, tais que

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Definamos os números

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx, \qquad (2)$$

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx,\ 1 \leq k \leq n, \qquad (3)$$

$$A_k = \int_0^k \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx,\ 1 \leq k \leq n, \qquad (4)$$

---

[1] Bolsista PET-Matemática da UFCG. Programa financiado pelo FNDE
[2] Tutor PET-Matemática da UFCG. Programa financiado pelo FNDE

onde p é um número primo, a ser escolhido posteriormente, tal que $p > \max\{n, |a_0|\}$.

Encontrando os valores das integrais acima, verifica-se que M é um inteiro que não é divisível por p. Verifica-se, ainda, que para cada $1 \leq k \leq n$, o número inteiro M_k é divisível por p .
As expressões (2), (3) e (4) resultam em

$$e^k = \frac{M_k + A_k}{M}, \qquad k = 1,2, \dots, n.$$

Substituindo essa expressão em (1) obtêm-se

$$a_n\left(\frac{M_n + A_n}{M}\right) + a_{n-1}\left(\frac{M_{n-1} + A_{n-1}}{M}\right) + \dots + a_1\left(\frac{M_1 + 1}{M}\right) + a_0 = 0 \ . \qquad (5)$$

Como $p > |a_0|$ e $p|M_k$ para todo $k \in \{1,2, \dots, n\}$, então

$$p \nmid a_0 \text{ e } p \nmid M \Longrightarrow p \nmid a_0 M \text{ e ainda } p \nmid a_n A_n + a_{n-1}A_{n-1} + \cdots + a_1 A_1.$$

De (5) e da última afirmação segue que,

$$a_n A_n + a_{n-1}A_{n-1} + \cdots + a_1 A_1$$

é um inteiro não-nulo. (6)

A partir de algumas manipulações algébricas podemos constatar que, para $1 \leq k \leq n$,

$$|A_k| \leq e^k \int_k^{\infty} \frac{|x^{p-1}[(x-1)\cdots(x-n)]^p|e^{-x}}{(p-1)!}\, dx.$$

Tomando $A = \max_{x \in [0,n]}\{|(x-1)\cdots(x-n)|\}$, temos $|A_k| \leq \dfrac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}$.

Note que A e n são fixos. Assim, $\frac{(nA)^p}{(p-1)!}$ é um número muito pequeno para p suficientemente grande. Logo, pela última desigualdade, $|A_k|$ é muito pequeno para p suficientemente grande, e como $p|M_k$ para $1 \leq k \leq n$, seguem de (5) e de (6) que

$$a_n M_n + a_{n-1}M_{n-1} + \cdots + a_1 M_1 + a_0 M \neq 0$$

o que contradiz (5). Portanto, *e* é transcendente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] NIVEN, Ivan, *"A simple proof that π is irrational*", Bulletin of the American Mathematical Society53 (6): 509, 1947.

[2] SPIVAK, Michael, *"Calculus"* , Londres: Addison Wesley, 1973.