O Problema das Cartas mal endereçadas de Nicolaus Bernoulli e Euler: uma nota sobre como Euler resolveu brilhantemente um problema interessante

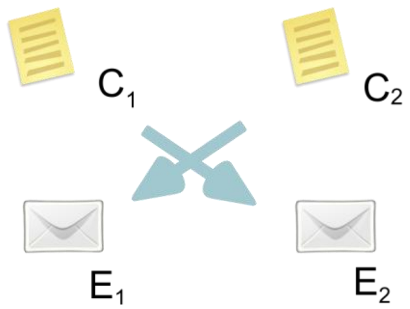
Daniel Cordeiro de Morais Filho (daniel@dme.ufcg.edu.br)
Mario Sérgio Alves Ferreira (mario@dme.ufcg.edu.br)
Universidade Federal de Campina Grande

Introdução

Vamos resolver o seguinte problema:

"De quantas maneiras distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto?"

Supondo que a carta C_i deve seguir para o destinatário com endereço no envelope E_i, a resposta do problema quando $n = 2$ é 2. Veja o desenho:



Nesse caso temos as possibilidades: $\{(C_1, E_2), (C_2, E_1)\}$.
Já quando $n = 3$, a resposta é 6, pois nesse caso, temos as possibilidades:

$$\{(C_1, E_2), (C_2, E_3), (C_3, E_1), (C_1, E_3), (C_2, E_1), (C_3, E_2)\}.$$


Nicolaus Bernoulli

Mas qual a resposta para o caso geral?

Esse problema foi originalmente proposto por *Nicolaus Bernoulli (1687-1759)*, sobrinho dos eminentes matemáticos *Jacob* (1654-1705) e *Johann (1667-1748)*, da prestigiosa família Bernoulli, que mais produziu matemáticos em toda história. A contribuição de *Nicolaus* para o estudo e desenvolvimento da matemática pode ser aferida na numerosa correspondência (mais de 560 cartas!) que trocou com vários colegas, dentre os quais *Leonard Euler* (1707-1783).


Leonhard Euler

Ao longo de sua prolífera vida, Euler foi um grande "resolvedor" de problemas matemáticos. Alguns desses problemas abriram novos campos de pesquisa matemática, como o problema formulado no começo do artigo. Talvez *Euler* se interessou pelo problema das cartas mal endereçadas por se tratar de uma questão curiosa e desafiadora da teoria das permutações, hoje chamada permutação caótica.

Uma permutação de elementos é dita ***caótica*** se, ao permutarmos esses elementos, nenhum deles continua em sua posição original. Com essa interpretação, o problema das cartas mal endereçadas toma a seguinte formulação, mais moderna e mais geral:

"Qual o número de permutações caóticas de n elementos?"

A resposta que daremos para essa pergunta é a solução original do próprio Euler. O que nos faz apresentá-la é a maneira como Euler resolveu esse problema, usando idéias originais e simples, apenas com algumas manipulações algébricas, plenamente inteligíveis por alunos do ensino médio. Com essa solução, alunos e professores podem constatar que problemas de contagem podem ser muito interessantes, e, para resolvê-los, não é suficiente classificá-los em um problema de arranjo, permutação ou combinação e simplesmente usar uma fórmula.

Em geral, diferentemente do que faremos, o número de permutações caóticas é obtido usando-se diretamente o Princípio da Inclusão-Exclusão.

Apreciemos a solução de Euler:

Chamaremos $\overline{n}$ o número de maneiras de se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto (em outras palavras, $\overline{n}$ é o número de permutações caóticas de n elementos).

Sejam as cartas $C_1, C_2, \ldots, C_n$, e os envelopes $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

A princípio, a solução é dividida em dois casos:

(i) C_1 é colocada em E_2 e C_2 é colocada em E_1;

(ii) C_1 é colocada em E_2 e C_2 não é colocada em E_1.

O caso (i) tem $\overline{n-2}$ soluções e o caso (ii) tem $\overline{n-1}$ soluções. Assim, o número de soluções no caso em que "C_1 é colocada em E_2" é $\overline{n-1} + \overline{n-2}$. Esse número de soluções é o mesmo no caso em que "C_1 é colocada E_3", que "C_1 é colocada em E_4", ... , que "C_1 é colocada em E_n". Contando todos os casos possíveis, $\overline{n}$ será dado por:

$$\overline{n} = (n-1)[\,\overline{n-1} + \overline{n-2}\,]. \quad \text{(I)}$$

Com isso, o matemático obteve uma fórmula de recorrência, que ainda precisava ser melhorada para encontrar $\overline{n}$.

Ele reescreveu a fórmula anterior como

$$\overline{n} - n.(\overline{n-1}) = (n-1)[\overline{n-1} + \overline{n-2}] - n.\overline{n-1}$$
$$= (-1).\overline{n-1} + (n-1).\overline{n-2} \Rightarrow$$
$$\overline{n} - n.(\overline{n-1}) = (-1)[\overline{n-1} - (n-1).\overline{n-2}]. \qquad \text{(II)}$$

Aplicando a equação (II), sucessivamente, para $n \geq 3$, obtem-se:

$$\overline{3} - 3.\overline{2} = (-1)[-2.\overline{1}]$$
$$\overline{4} - 4.\overline{3} = (-1)[\overline{3} - 3.\overline{2}]$$
$$\vdots$$
$$\overline{n} - (n.\overline{n-1}) = (-1)[\overline{n-1} - (n-1).\overline{n-2}]$$

Multiplicando as $(n-2)$ equações anteriores e fazendo os devidos cancelamentos, segue-se que:

$$\bar{n} - (n.\overline{n-1}) = (-1)^{n-2}[\bar{2} - 2.\bar{1}]$$

Como $\bar{1} = 0, \bar{2} = 1$ e $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, tem-se:

$$\bar{n} - (n.\overline{n-1}) = (-1)^n \qquad \text{(III)}$$

Assim, “o grande resolvedor” obteve uma equação bem melhor do que (I), por conter $\bar{n}$ para números sucessivos.

Para encontrar $\bar{n}$**,** ele dividiu a equação (III) por $n!$, donde:

$$\frac{\bar{n}}{n!} - \frac{n.\overline{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \frac{\bar{n}}{n!} - \frac{\overline{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{(IV)}$$

Aplicando a equação (IV) para os sucessivos valores de $n \geq 2$, tem-se:

$$\begin{gathered} \frac{\bar{2}}{2!} - \frac{\bar{1}}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} \\ \frac{\bar{3}}{3!} - \frac{\bar{2}}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!} \\ \vdots \\ \frac{\bar{n}}{n!} - \frac{\overline{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}\,. \end{gathered}$$

Agora sim, adicionando as $(n-1)$ equações anteriores, chega-se a:

$$\frac{\bar{n}}{n!} - \frac{\bar{1}}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Sabendo que $\bar{1} = 0$, a igualdade anterior resulta em:

$$\frac{\bar{n}}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Finalmente, Euler encontrou a resposta do problema das cartas:

$$\boldsymbol{\bar{n} = n!\left[\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]}.$$

Genial, não acham?

Agora, na época de Natal, o leitor pode prontamente responder à pergunta do presente do amigo oculto:

“De quantas maneiras as pessoas de um grupo de n amigos podem sortear seus amigos ocultos, sem que uma pessoa sorteie-se a si mesma?”

Quem desejar saber mais sobre combinações caóticas sugerimos as três últimas referências mencionadas no final do texto.

Bibliografia

[1] http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
[2] http://pt.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli
[3] http://pt.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli
[4] Dorrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics, their history and solution*, Dover Publications, 1958.
[5] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*, Editora UNICAMP, 2004.
[6] Morgado, A. C. et al., *Análise Combinatória e Probabilidade*, SBM, Coleção do Professor de Matemática.
[7] Santos, J. P. et al., *Introdução à Análise Combinatória*, Rio de janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.
[8] Pereira, A. G. & Campos, V. S. M. , *Análise combinatória*, *Permutações Caóticas*, Aula 8 do Programa Universidade a distância, UNIDIS Grad, EDUFRN, 2006.