

Revelando um segredo das parábolas

Grupo PET-Matemática da Universidade Federal de Campina Grande

Daniel Cordeiro de Moraes Filho (Orientador)

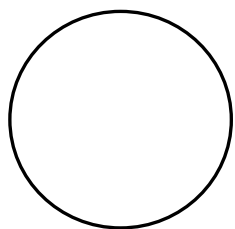
Alan Guimarães de Araújo

Jogli Gidel da Silva Araújo

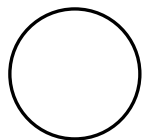
Lorena Brizza Soares Freitas

Introdução

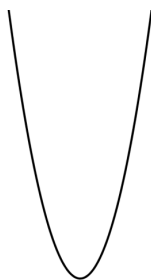
Observe atentamente as figuras abaixo



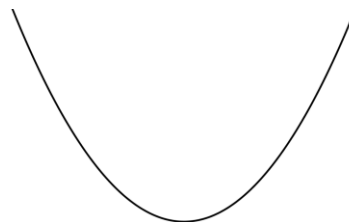
Circunferência 1



Circunferência 2



Parábola 1



Parábola 2

Qual a diferença no formato das duas circunferências?

E qual a diferença no formato das duas parábolas?

Contamos que só prossiga, depois de responder essas perguntas.

Se sua resposta à primeira pergunta tiver sido que as duas circunferências têm o mesmo formato, parabéns, você acertou! Ora, sem nos preocuparmos com a medida do raio ou onde esteja o centro de qualquer circunferência, é intuitivo admitir que todas elas têm o mesmo formato. Uma circunferência é apenas ampliação ou redução de outra, ou seja, sempre possível sobrepormos o desenho de duas circunferências, “ampliando” ou “reduzindo” um deles.

E qual foi sua resposta para a segunda pergunta? Se foi que as parábolas têm formatos diferentes, pois uma é “mais aberta” ou “menos fechada” do que a outra, lamentamos informá-lo que você errou! Mas não se chateie, o desenho enganou sua intuição e nosso artigo é justamente sobre esse erro.

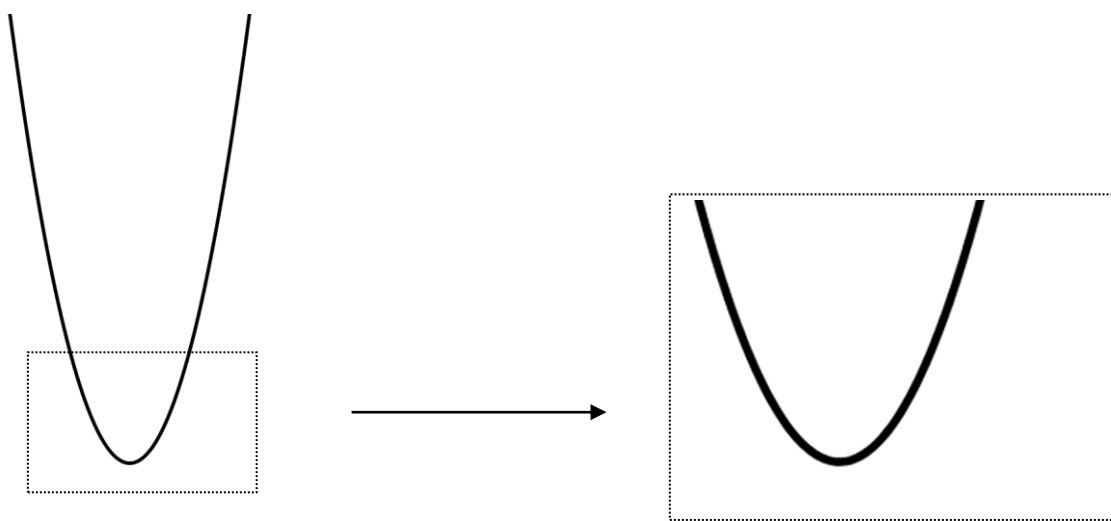
O que ocorre com as circunferências, incrivelmente também ocorre com as parábolas, ou seja, independentemente de onde estejam o eixo de simetria ou o foco de uma parábola, todas têm o mesmo formato! Uma parábola é apenas uma redução ou ampliação de outra! Esse é um fato pouco conhecido e despercebido em livros didáticos. Constatamos que mesmo pessoas com grande experiência em matemática não o tinham observado.

Porque, então, temos a impressão de ver uma parábola “mais aberta” que outra? Visualizamos e somos levados a concluir isso quando desenhamos parábolas, e usamos mesmo esses termos ao dizer, por exemplo, que o gráfico da parábola $y=4x^2$ é “mais fechado” do que o da parábola $y=x^2$. O que justifica esse fato?

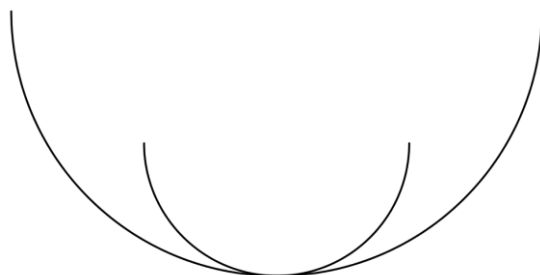
Comparemos circunferências com parábolas para darmos uma resposta.

A explicação é que a circunferência é uma curva limitada, ela cabe, por exemplo, em um quadrado que desenhamos em torno dela. Dessa maneira, podemos desenhar e visualizar totalmente duas circunferências e compará-las por completo, ficando mais claro que têm o mesmo formato.

Já com as parábolas, isso não ocorre. Parábolas são curvas ilimitadas, daí, por mais que desejemos, só podemos desenhar e visualizar um pedaço delas, e se vemos dois pedaços diferentes dos gráficos de duas parábolas, dá a impressão de que podem ter formatos diferentes. Na verdade, os desenhos das parábolas 1 e 2 foram propositadamente apresentados com mesmo tamanho, confundindo ainda mais a percepção visual. O desenho a seguir esclarece com mais detalhes que a parábola 2 é apenas uma ampliação de um pedaço da parábola 1.

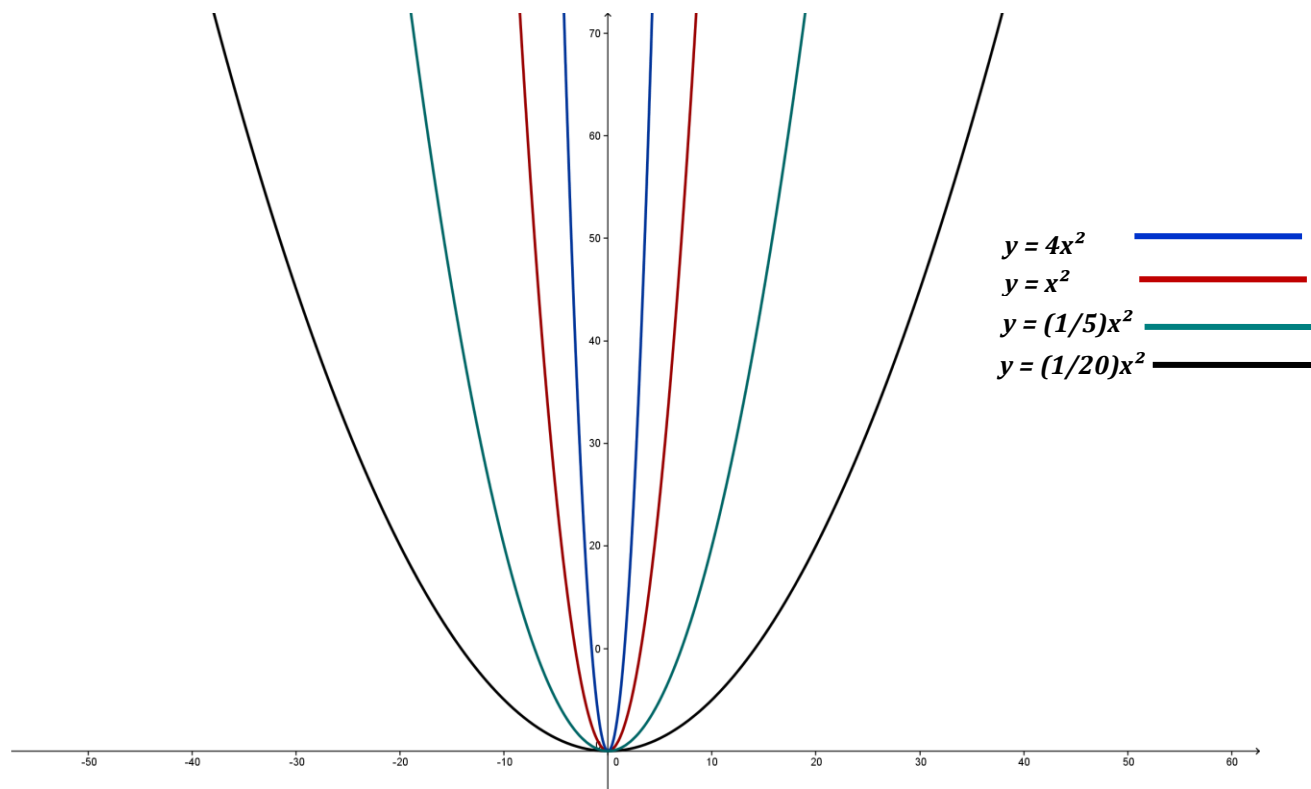


Para convenceremos mais ainda sobre nossas afirmações, suponha por um momento que uma circunferência fosse uma curva ilimitada e só pudéssemos desenhar uma parte dela. Daí, ao desenharmos dois pedaços de circunferência, poderíamos apresentar esses desenhos da maneira a seguir, como sempre fazemos com as parábolas:



Certamente o desenho poderia dar a impressão que circunferências têm formatos diferentes. É o que ocorre com os desenhos das parábolas.

Para finalizar, se desenharmos os gráficos das parábolas $y = ax^2$, $a > 0$, devemos observar que quanto menor o número a , maior será o pedaço da parábola que podemos desenhar e quanto maior o número a , menor será o pedaço da parábola que podemos visualizar. Na verdade, o valor do número a determina uma escala no desenho.



Todo apelo que fizemos até o momento foi visual, precisamos agora demonstrar matematicamente o que estamos afirmando: tal como as circunferências, todas as parábolas têm o mesmo formato. Para isso, usaremos uma linguagem simples e assuntos muitas vezes esquecidos nos conteúdos do Ensino Médio. Fazemos isso como um convite para que esse assunto possa ser levado às salas de aula como um tema instigante e interessante.

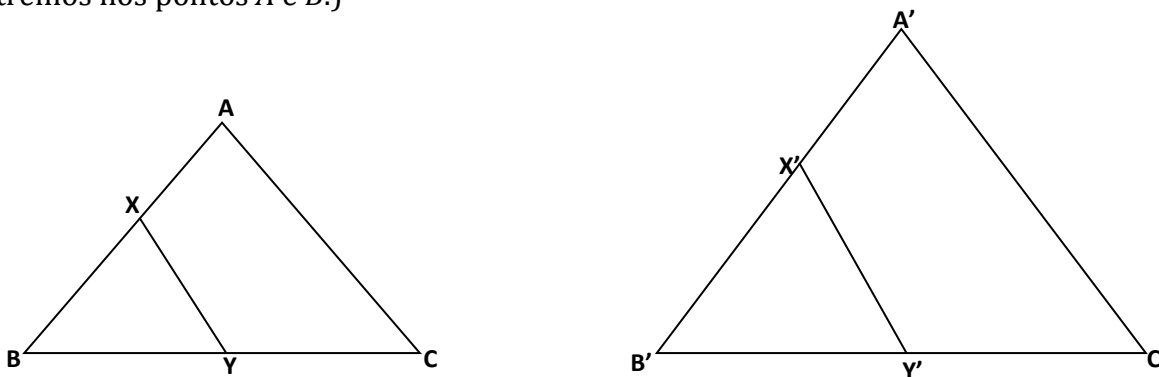
O que significa uma curva ser uma redução ou ampliação de outra?

Na Introdução usamos uma linguagem informal e apelamos para a noção intuitiva que os leitores possuíam sobre certos conceitos que precisariam ser mais bem explicados, como *mesmo formato*, *mais aberta*, *menos aberta*, *pedaços de uma curva*, *ampliação* e *redução*. Para melhor compreensão do que exporemos e por simplicidade, formalizaremos apenas o primeiro e os dois últimos deles, o que em nada afeta nossa explanação.

Para um aluno do Ensino Médio a idéia de uma curva ser ampliação ou redução de outra apareceu quando foi estudado semelhança de triângulos:

Definição 1: Dois triângulos $T = \triangle ABC$ e $T' = \triangle A'B'C'$ são **semelhantes** quando $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$.

(Observação: estamos denotando por \overline{AB} o comprimento de um segmento de reta com extremos nos pontos A e B .)



Caso chamemos $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$, fica claro que os triângulos T' e T são semelhantes quando existir uma constante $k > 0$ tal que os comprimentos dos lados dos triângulos se relacionam segundo as igualdades $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$, $\overline{B'C'} = k\overline{BC}$ e $\overline{C'A'} = k\overline{CA}$. A definição vista dessa forma, revela que se $0 < k < 1$, o triângulo T' é uma redução do triângulo T , quando $k = 1$ os triângulos T' e T podem um ser sobreposto sobre o outro (são congruentes), e quando $k > 1$, o triângulo T' é uma ampliação do triângulo T .

Precisamos estender essa definição para duas curvas quaisquer C' e C do plano. Primeiramente, apresentemos uma motivação usando triângulos: sejam X e Y dois pontos quaisquer do triângulo T . Suponhamos x no lado AB e y no lado BC . A esses dois pontos, podemos associar únicos pontos X' e Y' no triângulo T' , de modo que $\overline{X'Y'} = k\overline{XY}$. Para isso, basta marcar no lado $A'B'$ um ponto X' de modo que $\overline{AX} = \frac{1}{k}\overline{A'X'}$, ou melhor, $\overline{A'X'} = k\overline{AX}$, e marcar no lado $B'C'$ um ponto Y' de modo que $\overline{BY} = \frac{1}{k}\overline{B'Y'}$, ou melhor, $\overline{B'Y'} = k\overline{BY}$. Como os triângulos $\triangle XBY$ e $\triangle X'B'Y'$ são semelhantes (pelo caso L.A.L.), resulta a igualdade $\overline{X'Y'} = k\overline{XY}$. Note que por esse processo quaisquer dois pontos do triângulo T' podem sempre ser obtidos por dois pontos do triângulo T .

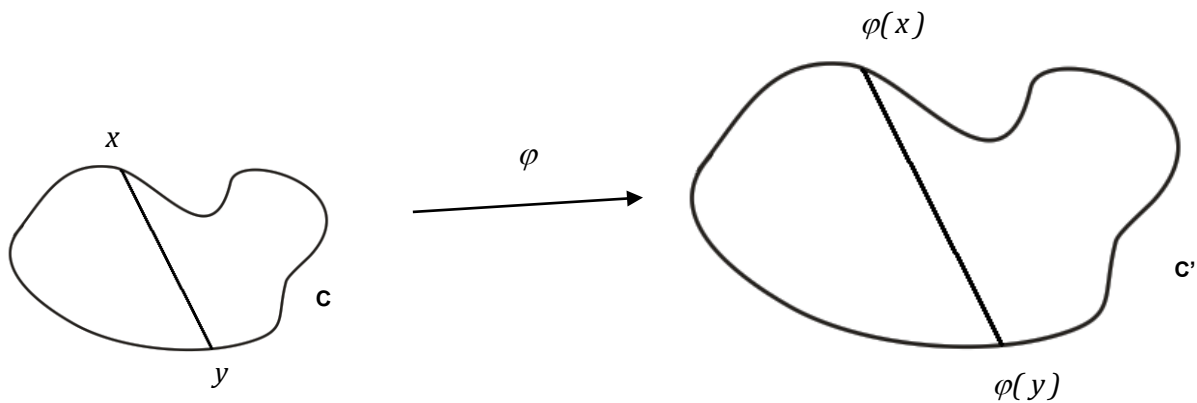
No parágrafo acima, as palavras *A esses dois pontos, podemos associar únicos pontos* lembra o conceito de função como uma regra que associa elementos, as palavras *associar únicos pontos* lembra o conceito de função injetiva e as palavras *quaisquer dois pontos do triângulo T podem sempre ser obtidos por dois pontos do triângulo T'* lembra o conceito de função sobrejetiva. Na verdade, criamos propositadamente uma situação favorável onde surge a importância de se conhecer (e usar!) o conceito de função bijetiva que, em muitos livros didáticos do Ensino Médio, parece não ter serventia alguma, a não ser apenas para o aluno resolver exercícios manipulativos sobre esse mesmo conceito!

No caso anterior, ensinamos como construir uma função bijetiva $\varphi: T \rightarrow T'$, definida por $\varphi(X) = X'$, de modo que $\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = \overline{X'Y'} = k\overline{XY}$. Como vimos, no caso de triângulos, a semelhança entre dois deles gera uma função desse tipo e a recíproca é imediatamente válida.

Já que um triângulo pode ser visto como uma curva no plano, usemos a ideia da existência dessa função para definirmos semelhança entre duas curvas.

Definição 2: Duas curvas C e C' são ditas **semelhantes** quando existirem um número $k > 0$ e uma função bijetiva $\varphi: C \rightarrow C'$ de modo que $\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = k\overline{XY}$. A função φ chama-se **função de semelhança** e o número k chama-se **constante de semelhança** das curvas C e C' . Quando $0 < k < 1$, a curva C' é chamada uma **redução** da curva C e quando $k > 1$, a curva C' é chamada uma **ampliação** da curva C .

$$\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = k\overline{XY}$$



A função φ apenas amplia ou reduz a curva C , transformando-a na curva C' . Demos, portanto, uma definição formal e matematicamente aceitável de uma curva ser uma ampliação ou redução de outra. Pegando carona na Definição 1 podemos ainda formalizar a idéia de duas curvas terem o mesmo formato, definindo:

Definição 3: Duas curvas C e C' têm o mesmo formato quando forem semelhantes.

Vejamos como essas definições se relacionam com o que queremos demonstrar.

Duas circunferências são sempre semelhantes e duas parábolas são sempre semelhantes

Sob o enfoque que acabamos de apresentar, mesmo beirando o óbvio, mostremos que duas circunferências têm sempre o mesmo formato, ou seja, duas circunferências são sempre semelhantes.

Ora, como estamos analisando apenas o formato de curvas, não interessa onde as situemos no plano, não é mesmo? Observe que os movimentos de girar ou transladar (mover paralelamente a um dos eixos cartesianos) uma curva não altera seu formato, por esse motivo, esses movimentos chamam-se **movimentos rígidos**. Usaremos movimentos rígidos para simplificar a equação de uma dada curva no plano cartesiano.

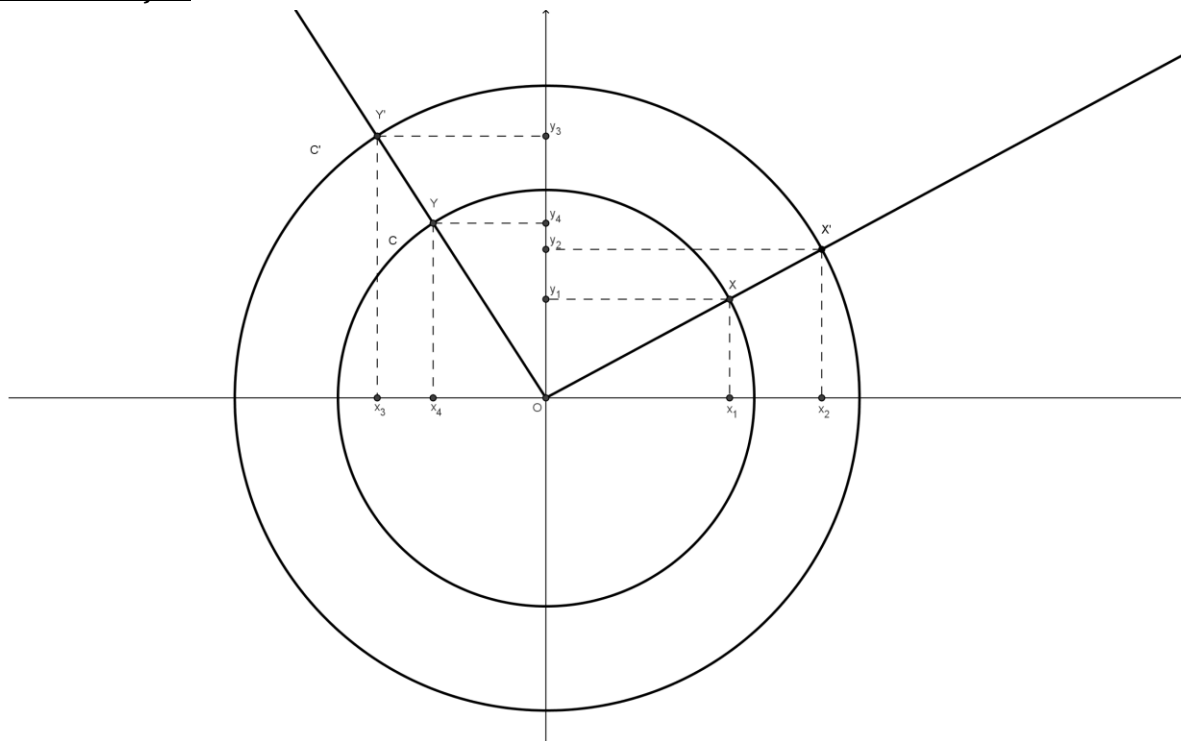
A partir de agora, vamos utilizar conhecimentos de Geometria Analítica, do conteúdo Seções Cônicas.

Duas circunferências são sempre semelhantes

Dadas duas circunferências C e C' , pelo que dissemos anteriormente, por movimentos rígidos, especificamente, translações, podemos supor que os centros delas estão na origem do sistema cartesiano. Com isso, as equações das circunferências tomam as seguintes formas, bastante simples:

Se $C': x^2 + y^2 = R'^2$ e $C: x^2 + y^2 = R^2$, onde consideramos $0 < R < R'$.

Demonstração



Considere os triângulos Ox_1X e Ox_2X' , note que esses triângulos são semelhantes, deste modo, tem-se:

$$\frac{\overline{Ox_1}}{\overline{Ox_2}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OX'}} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{R}{R'} \Rightarrow x_2 = \frac{R'}{R} x_1 \quad (1)$$

Analogamente, mostra-se que:

$$y_2 = \frac{R'}{R} y_1 \quad (2)$$

Da mesma forma, considerando os triângulos Ox_4Y e Ox_3Y' , temos:

$$x_3 = \frac{R'}{R} x_4 \text{ e } y_3 = \frac{R'}{R} y_4 \quad (3)$$

De imediato obtemos:

$$\overline{XY} = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \quad \text{e} \quad \overline{X'Y'} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

De (1), (2) e (3), segue que:

$$\overline{X'Y'} = \frac{R'}{R} \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} = \frac{R'}{R} \overline{XY}$$

Portanto

$$\overline{X'Y'} = \frac{R'}{R} \overline{XY}$$

O que mostra que as circunferências são semelhantes e a função de semelhança entre elas é

$$\begin{aligned} \varphi: C &\rightarrow C' \\ (x, y) &\rightarrow \left(\frac{R'}{R}x, \frac{R'}{R}y \right) \end{aligned}$$

Duas parábolas são sempre semelhantes

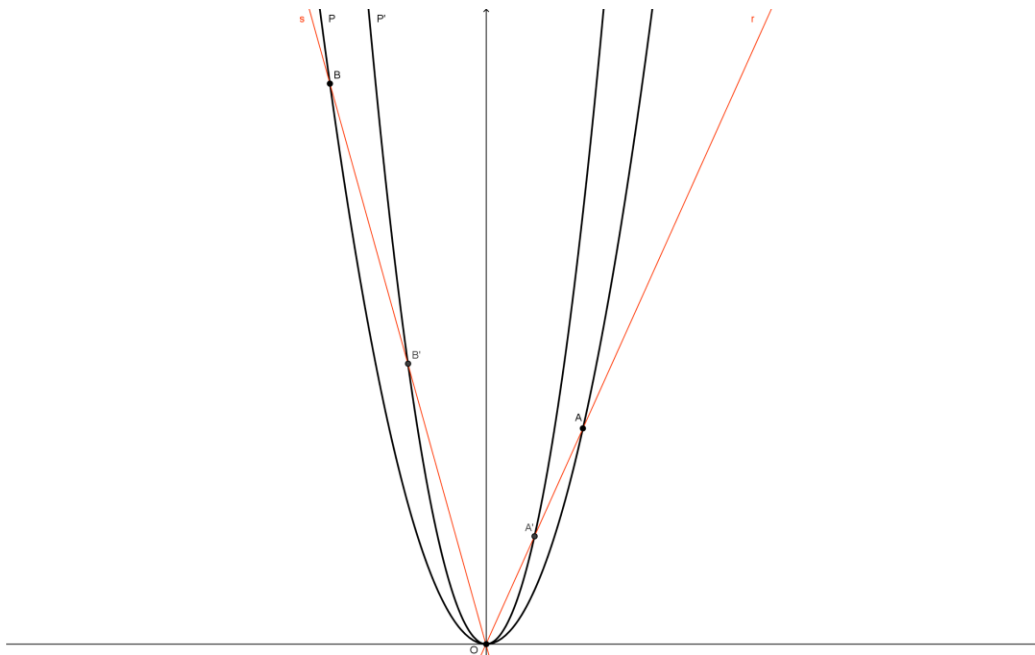
As parábolas estudadas no Ensino Médio têm sempre o eixo de simetria paralelo a um dos eixos cartesianos, mas aqui, podemos considerar parábolas quaisquer.

Pelos movimentos rígidos de rotação e translações, podemos mover duas parábolas quaisquer no plano cartesiano de forma que o eixo de simetria delas seja o eixo dos y' s e que seus pontos de mínimos coincidam com a origem. Daí, as equações dessas parábolas podem ser escritas simplificadaamente como :

$$P: y = ax^2 \text{ e } P': y = a'x^2, \text{ onde } 0 < a \leq a'.$$

Demonstração

Observe as parábolas na figura abaixo:



Considere as parábolas P e P' cujas equações são, respectivamente, $y = ax^2$ e $y = a'x^2$, com $0 < a \leq a'$.

Seja o ponto $A(x_a, ax_a^2)$, com $x_a > 0$, pertencente a parábola P. Considere a reta r que passa pelo ponto A e pela origem $O(0,0)$.

Como r passa pela origem, então sua equação será da forma $y = mx$, onde:

$$m = \frac{ax_a^2 - 0}{x_a - 0} = \frac{ax_a^2}{x_a} = ax_a$$

Note que a reta r corta a parábola P' num ponto que denotaremos por A', vamos agora encontrar as coordenadas desse ponto:

$$\begin{cases} r : y = (ax_a)x \\ P' : y = a'x^2 \end{cases} \Rightarrow (ax_a)x = a'x^2 \Rightarrow ax_a = a'x \Rightarrow x = \frac{ax_a}{a'} \quad A' \left(\frac{ax_a}{a'}, \frac{a^2x_a^2}{a'} \right)$$

Analogamente encontraremos $B' \left(\frac{ax_b}{a'}, \frac{a^2x_b^2}{a'} \right)$

Daí,

$$\overline{A'B'}^2 = \left(\frac{a}{a'} \right)^2 [(x_b - x_a)^2 + a^2(x_b^2 - x_a^2)^2] = \left(\frac{a}{a'} \right)^2 \overline{AB}^2$$

Portanto, a função

$$\begin{aligned}\varphi: P &\rightarrow P' \\ (x, y) &\rightarrow \left(\frac{a}{a'}x, \frac{a}{a'}y\right)\end{aligned}$$

É uma função de semelhança entre as parábolas P e P' e a constante de semelhança é $\frac{a}{a'}$.

E as outras cônicas? O que ocorre com elas?

As cônicas são quatro curvas bem conhecidas: circunferência, parábola, elipse e hipérbole. Ao estudá-las, muitas vezes é apresentada a definição formal de excentricidade, mas pouco se fala sobre o que realmente significa *excentricidade*. Além disso, você já se fez as seguintes perguntas:

Por que não se define excentricidade de circunferências e de parábolas? Por que apenas elipses e hipérbolas têm excentricidade?

Ora, com a teoria que desenvolvemos, a resposta é simples: a excentricidade pode ser usada para comparar o quanto os formatos de duas elipses são diferentes ou o quanto os formatos de duas hipérbolas são diferentes. Elipses ou hipérbolas com excentricidades diferentes têm formatos diferentes. Assim, não faz sentido definir excentricidade de circunferências e de parábolas, pois duas circunferências ou duas parábolas são sempre semelhantes e daí possuem os mesmos formatos.

No caso das outras cônicas, provemos que nem sempre duas elipses são semelhantes, ou duas hipérbolas são semelhantes, elas podem ter realmente os formatos diferentes e a excentricidade pode ser usada para comparar essa diferença. Esse fato decorre do seguinte resultado, também bastante simples de ser apresentado em uma aula sobre seções cônicas:

Teorema: Duas elipses são semelhantes se, e somente se, têm a mesma excentricidade.

Demonstração:



Consideremos duas elipses E e E' com função de semelhança $\varphi: E \rightarrow E'$ e constante de semelhança $k > 0$. Por movimentos rígidos, podemos considerar que E e E' estejam na seguinte posição.

DESENHO.

Ou seja, os vértices da elipse E são $v_1 = (-a, 0)$, $v_2 = (a, 0)$, $v_3 = (0, b)$ e $v_4 = (0, -b)$. E os vértices da elipse E' são $\varphi(v_1) = (-a', 0)$, $\varphi(v_2) = (a', 0)$, $\varphi(v_3) = (0, b')$, $\varphi(v_4) = (0, -b')$.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi(v_1)\varphi(v_2)} &= \overline{kv_1v_2} \Rightarrow \\ 2a' &= k2a \Rightarrow \\ a' &= ka\end{aligned}$$

Semelhantemente:

$$b' = kb$$

Denotando por c a semi-distância focal da elipse E , a excentricidade da elipse E vale $e = \frac{c}{a}$.

Vamos deduzir a excentricidade e' da elipse E' . Para tal, notemos que a semi-distância focal c' da elipse E' vale:

$$c' = \sqrt{a'^2 - b'^2} = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = kc$$

Logo, segue-se que:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{kc}{ka} = e'$$

Veja que a última igualdade assegura a igualdade entre as excentricidades, o que conclui a primeira parte da demonstração.

Reciprocamente, vamos supor que E e E' tenham mesma excentricidade. Isto é,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{kc}{ka} = e'$$

Seja b o semi-eixo menor da elipse E . Então, o semi-eixo menor da elipse E' vale:

$$b' = \sqrt{(ka)^2 - (kc)^2} = kb$$

Logo, as equações de E e E' são:

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, E': \frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1$$

Verifica-se que:

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (kx, ky) \in E'$$

Então, vamos definir a função $\varphi: E \rightarrow E'$ do seguinte modo:

$$\varphi(x, y) = (kx, ky)$$

Afirmação:

A função φ é de semelhança e tem constante de proporcionalidade k .

De fato, dados os pontos $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \in E$ e $\varphi(kx_a, ky_b), \varphi(kx_b, ky_b) \in E'$, temos:

$$\overline{\varphi(A)\varphi(B)} = k\overline{AB}$$

Tal igualdade encerra a recíproca da demonstração.

Do teorema anterior decorre que elipses têm formatos diferentes bastando ter excentricidades diferentes, e vice-versa.

O caso das hipérbolas fica como exercício e decorre analogamente.

Conclusão

Ao dizermos que os gráficos de duas parábolas são diferentes, devemos ter em mente que essa diferença não é pelo fato dos gráficos terem formatos diferentes, mas sim pelo fato desses gráficos serem formados por subconjuntos diferentes do plano cartesiano. Podemos até mesmo dizer que “o pedaço do gráfico que vemos é mais aberto que o outro”, o que importa é que se conheça o que está por trás dessas afirmações e esperamos que esse artigo tenha esclarecido isso.

Encerramos alertando que um fato matemático pode ser simples, instigante e desconhecido, tornando-se ainda mais interessante pelo fato de não corresponder ao que sugere a intuição. É importante que nós, professores, saibamos desenvolver a capacidade de identificar esses fatos matemáticos e saber transmiti-los a nossos alunos, de forma desafiadora e emocionante!