As curiosas matrizes circulantes

Emanuel Carlos Albuquerque Alves
Tiago Alves de Sousa
Daniel Cordeiro de Morais Filho (Orientador)

Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Matemática

06 de Novembro de 2014

Método

Objetivo Explorar a curiosa resolução de equações polinomiais utilizando matrizes circulantes e conceitos de álgebra linear.

Método

- Seja p um polinômio de grau n ao qual deseja-se determinar as raízes.
- Considere uma matriz circulante C formada pelo vetor $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n-1})$, que apresente polinômio característico igual a p, ou seja, $p_c(x) = p(x)$. Logo, as raízes de p serão autovalores da matriz C.
- Podemos associar a matriz C a um polinômio q de coeficientes $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n-1})$ de sorte que $C = q(M)$, com M sendo uma matriz circulante de vetor $(0, 1, 0, ..., 0)$ e de raízes complexas da unidade (ω) como autovalores.
- **Proposição 1:** $Mv = \omega v \Rightarrow Cv = q(\omega)v$, com v sendo o autovetor.
- A proposição 1 nos diz que os autovalores da matriz circulante C são da forma $q(\omega)$. Portanto, as raízes de $p = p_c$ também são $q(\omega)$.

Exemplificação

Calcular as raízes de $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

Resolução

Considere a matriz $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$ de polinômio característico p_c e $q(x) = a + bx + cx^2$ o polinômio associado a C.

Daí, $p(x) = \mathrm{p_c}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a & = 3 \\ 3bc - 3a^2 & = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & = 1 \end{cases}$.

Podemos concluir, a partir do sistema acima, que $q(x) = 1 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}x^2$. Portanto, pela proposição 1, têm-se $q(1), q(w)$ e $q(\overline{w})$ tanto como autovalores de C, quanto raízes do polinômio $p(x)$, com $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

KALMAN, D.; WHITE, J. E..*Polynomial Equations and Circulant Matrices*. The Mathematical Association of America, Vol.108, nº 9, p. 821-840, 2001.