Uma aplicação não muito convencional da Topologia na Aritmética: uma demonstração da infinitude dos números primos

Bruna Alves da Silva Santos[1] **- bruna.silva@estudante.ufcg.edu.br**
Matheus da Silva Nascimento[1] **- matheus.s.nascimento@estudante.ufcg.edu.br**
Daniel Cordeiro de Morais Filho[1] **- daniel@mat.ufcg.edu.br**

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil - Parcialmente financiado pelo MEC/FNDE/PET

Resumo: *Após o matemático Henri Poincaré (1854-1912) publicar um artigo intitulado Analysis situs (POINCARÉ, 1895), que foi pioneiro na criação da Topologia, essa área de pesquisa avançou bastante e passou a contribuir indispensavelmente nas principais áreas de estudo de Matemática. Neste trabalho, desenvolvido pelo Grupo PET-Matemática-UFCG e orientado pelo professor Daniel Cordeiro, perceberemos o quanto a linguagem topológica pode ser abrangente, fato que exemplificaremos por meio de um uso nada convencional da topologia na demonstração do famoso Teorema de Euclides sobre a infinitude dos números primos (FURSTENBERG, 1955). Tal demonstração é fundamentada na introdução de uma topologia no conjunto discreto* $\mathbb{Z}$*, baseada em uma definição bastante criativa de conjunto aberto, intuitivamente bem diferente da que estudamos nos espaços euclidianos completos usuais.*
Palavras-chave: *Topologia; Números primos; Conjuntos abertos*

1. Introdução

Dentre as principais linhas de estudo de Matemática, podemos dizer que a Topologia é a mais nova delas. Segundo Eves (2011), o primeiro artigo inteiramente dedicado à Topologia, foi publicado no final do século XIX, com o título de *Analysis situs* (POINCARÉ, 1895), sob a autoria de Henri Poincaré (1854-1912). Após essa publicação de Poincaré, esse campo de estudos tornou-se indispensável na Matemática e passou a receber a contribuição de um número cada vez maior de pesquisadores.

Durante a graduação do estudante de Matemática, a primeira vez em que ouvimos o termo “Topologia”é nos cursos de Cálculo e de Análise Matemática. Neles somos apresentados à topologia dos espaços euclidianos, cujos conceitos são a base para o estudo de limites de funções, continuidades etc. Apesar desses serem os exemplos mais comuns de topologias, eles não são os únicos, aliás, os conceitos topológicos são bem mais abrangentes.

Por outro lado, os números primos é um tema que encanta matemáticos de todas as épocas, em especial a infinitude desse conjunto de números já recebeu diversas demonstrações, com as mais variadas argumentações. Uma demonstração da infinitude dos números primos, muito interessante, foi dada por Hillel Fürstenberg (1935), publicada na revista *American Mathematical Monthly* (FURSTENBERG, 1955), na qual foram utilizados conceitos da Topologia. Esta demonstração, posteriormente, também apareceu no famoso livro *Proofs from the book* (ZIEGLER; HOFMANN, 2014), que por sua vez, contém belíssimas demonstrações de resultados famosos da Matemática.

Em geral, a ideia que um estudante de Matemática pode ter, a princípio, é que os conceitos de Topologia só aparecem para conjuntos contínuos. Neste trabalho, faremos uma demonstração da infinitude dos números primos, por meio de conceitos topológicos, a medida que introduziremos uma topologia em um conjunto discreto, neste caso, o conjunto dos números inteiros, que foge as situações mais usuais. Tal demonstração não só encanta pela imparidade dos argumentos utilizados, mas também pelo uso da linguagem topológica que é capaz de proporcionar uma excelente degustação, até mesmo para aqueles que por ventura já conhecem este campo de estudos da Matemática.

2. Metodologia

Este trabalho é oriundo de uma atividade do Grupo PET-Matemática-UFCG, que visa o desenvolvimento de trabalhos de caráter científico na área de Matemática. A metodologia é exploratória bibliográfica, na qual de início o Tutor do Grupo nos apresentou o artigo sobre a infinitude dos números primos de autoria do matemático Hillel Fürstenberg. A partir daí, buscamos outras referências, em português e em língua estrangeira, para estudar sobre topologia e assim explorar e dar uma apresentação pessoal, usando os argumentos presentes na demonstração que aparece no artigo do Hillel Fürstenberg. Desse modo, o desenvolvimento deste trabalho também coincidiu com a atividade intitulada "Pesquisa em Competências Básicas no Uso da Linguagem Escrita e Oral, em Idioma Estrangeiro e na Área de Tecnologias de Informação e Comunicação", uma vez que usamos textos em inglês para elaboração do trabalho.

Ao longo do desenvolvimento do trabalho foram reservados horários de estudo individual, bem como de horários de reuniões com o Tutor, para que fossem feitas as devidas orientações para o estudo e a confecção do trabalho final. Ademais, também foi elaborado uma apresentação para os seminários internos do Grupo PET-Matemática-UFCG, relacionados à atividade intitulada "XI Workshop Didático-Pedagógico de Prática de Ensino em Matemática".

3. Resultado e discussão

3.1 Resultados básicos

Primeiro, vamos definir topologia, para isso escolhemos a definição adaptada de Lima (2009):

Definição 1. *Seja X um conjunto qualquer. Uma topologia em X é uma coleção τ de subconjuntos de X, denominados **abertos** (segundo a topologia τ), que cumpre as seguintes condições:*

i) *X e $\emptyset$ são abertos;*

ii) *Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são subconjuntos abertos de X, então a interseção $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é um conjunto aberto;*

iii) *Se $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ é uma coleção qualquer de subconjuntos abertos de X, então a união $\underset{\alpha \in L}{\cup} A_\alpha$ é um conjunto aberto.*

Para nossas finalidades precisaremos também da definição de conjuntos fechados e de uma importante propriedade deles:

Definição 2. *Um subconjunto F de X é dito **fechado**, quando seu complementar F^C, em relação a X, for um conjunto aberto.*

Ao longo do texto, faremos o uso de duas notações para tratar do complementar de um conjunto, a saber F^C e $X \setminus F$.

Proposição 1. *A união de dois subconjuntos fechados F_1 e F_2 de X, resulta em um conjunto fechado.*

Demonstração. De fato, pela Lei de De Morgan, podemos escrever

$$(F_1 \cup F_2)^C = F_1^C \cap F_2^C.$$

Ademais, como os conjuntos F_1 e F_2 são fechados, então pela Definição 2, os conjuntos F_1^C e F_2^C são abertos. Consequentemente, pelo item ii) da Definição 1 a interseção desses abertos resultará em um conjunto aberto, ou seja, $(F_1 \cup F_2)^C$ é aberto e portanto, o conjunto $F_1 \cup F_2$ é fechado. ■

Corolário 1.1. *A união finita de subconjuntos fechados $F_1, F_2, \cdots, F_n$ de X, é ainda um conjunto fechado.*

3.2 A definição da topologia

A partir de agora, voltaremos nossa atenção para o conjunto dos números inteiros, daí precisaremos adotar uma estratégia para estabelecer quando um subconjunto de $\mathbb{Z}$ é aberto. Nossa estratégia vai se basear em progressões aritméticas, fundamentada na seguinte definição:

Definição 3. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, uma progressão aritmética será uma sequência (infinita) da forma*

$$P_{a,b} = \{a + bn\,;\, n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Exemplo 1. *Considerando $a = 0$ e b um número inteiro positivo, a progressão aritmética obtida $P_{0,b}$, será exatamente o conjunto dos múltiplos inteiros de b, isto é*

$$P_{0,b} = \{bn\,;\, n \in \mathbb{Z}\} = \{\cdots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \cdots\} = b\mathbb{Z}.$$

De posse da Definição 3, vamos caracterizar os pretensos subconjuntos abertos de $\mathbb{Z}$, para em seguida verificar se essa família de subconjuntos introduz uma topologia em $\mathbb{Z}$.

Definição 4. *Diremos que $A \subseteq \mathbb{Z}$ é aberto, se A for vazio ou, se para cada $a \in A$ exista $b > 0$ tal que $P_{a,b} \subseteq A$.*

Exemplo 2. *O conjunto $\mathbb{Z}$ é aberto. Com efeito, dado qualquer número $a \in \mathbb{Z}$, seja qual for b inteiro positivo, podemos concluir que $P_{a,b} \subseteq \mathbb{Z}$.*

Proposição 2. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$, a progressão aritmética $P_{a,b}$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. De fato, considerando $a_0 \in P_{a,b}$, podemos escrever $a_0 = a + bn_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $P_{a_0,b} \subseteq P_{a,b}$. Para tanto, desde que $m \in P_{a_0,b}$, deve existir $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $m = a_0 + bn_1$. Consequentemente,

$$m = (a + bn_0) + bn_1 = a + b(n_0 + n_1) \in P_{a,b},$$

pois, $n_0 + n_1 \in \mathbb{Z}$. E portanto $P_{a_0,b} \subseteq P_{a,b}$. ■

Exemplo 3. *A Proposição 2, nos diz que as progressões aritméticas que vimos na Definição 3, são subconjuntos abertos de $\mathbb{Z}$, isto é, satisfazem a Definição 4. Desse modo, obtemos uma infinidade de subconjuntos abertos de $\mathbb{Z}$.*

Finalmente, vamos verificar que os subconjuntos abertos de $\mathbb{Z}$, segundo a Definição 4, satisfazem a Definição 1 de topologia:

i) Note que, por definição, $\emptyset$ é um conjunto aberto. Ademais, $\mathbb{Z}$ também é aberto, segundo o Exemplo 2;

ii) Sejam A_1, A_2, $\cdots$, A_n abertos, vamos mostrar que $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto. Para tanto, mostraremos primeiro que, para $n = 2$, o resultado é válido. De fato, dados A_1 e A_2 abertos, caso $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, é imediato que $A_1 \cap A_2$ é aberto. Por outro lado, se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, então podemos considerar $a \in A_1 \cap A_2$ e, como esses conjuntos são abertos, devem existir $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$ tais que

$$P_{a,b_1} \subseteq A_1 \;\text{ e }\; P_{a,b_2} \subseteq A_2.$$

Ademais, a progressão P_{a,b_1b_2} está contida nas progressões P_{a,b_1} e P_{a,b_2}, logo $P_{a,b_1b_2} \subseteq A_1 \cap A_2$. Daí, concluímos que $A_1 \cap A_2$ é aberto, e assim, que o resultado é válido para $n = 2$. Suponhamos agora, que o resultado é válido para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, que se A_1, A_2, $\cdots$, A_k são abertos, então $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ é aberto. Vejamos que isso implica que o resultado também será válido para $k + 1$. Com efeito, sendo A_{k+1} aberto então a intersecção dos dois conjuntos abertos

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \cap A_{k+1},$$

resulta em um conjunto aberto, logo o resultado também é válido para $k + 1$. Portanto, fica provado o resultado para qualquer n natural.

iii) Considere uma coleção qualquer $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ de conjuntos abertos, iremos mostrar que a união $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é um conjunto aberto. De fato, se todos esses conjuntos forem vazios, devemos ter $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha = \emptyset$, assim $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é aberto. Para o caso em que $A_{\alpha_0} \neq \emptyset$ para algum $\alpha_0 \in L$, então podemos considerar $a \in A_{\alpha_0}$ e como A_{α_0} é aberto, existe $b > 0$ tal que $P_{a,b} \subseteq A_{\alpha_0}$ e, consequentemente

$$P_{a,b} \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha.$$

Isso mostra que $\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha$ é um conjunto aberto.

As condições que acabamos de verificar, garantem que a família de subconjuntos abertos que apresentamos na Definição 4, de fato, introduzem uma Topologia em $\mathbb{Z}$.

3.3 Resultados principais

Proposição 3. *Todo subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{Z}$ é infinito.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{Z}$ aberto e não vazio. Como A é não vazio, podemos considerar $a \in A$. Além disso, como A é aberto, então para $a \in A$ deve existir $b \in \mathbb{Z}$, sendo $b > 0$, tal que $P_{a,b} \subseteq A$. Ora, $P_{a,b}$ é um subconjunto infinito de A, portanto, A também é infinito. ■

Para esta última conclusão, usamos a contrapositiva do resultado que diz que todo subconjunto de um conjunto finito é finito, tal resultado pode ser consultado em Lima (2004).

Proposição 4. *Se p é um número inteiro positivo, então*

$$P_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}.$$

Demonstração. Seja $x \in P_{0,p}$, então $x = np$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que

$$x \in \mathbb{Z} \setminus \cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}.$$

Suponha por contradição que $x \in \cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}$, assim $x = i + n_1 p$, para algum $i \in \{1, 2, ..., p-1\}$ e $n_1 \in \mathbb{Z}$, daí

$$np = n_1 p + i \Rightarrow i = (n - n_1)p.$$

Ou seja, p divide i, o que é um absurdo, pois $i \in \{1, 2, ..., p-1\}$. Logo, somos levados a admitir que $x \notin \cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}$ e, consequentemente, que

$$x \in \mathbb{Z} \setminus \cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}.$$

Por outro lado, para mostrar a inclusão contrária, basta garantir que $x \in P_{0,p}$, ou seja, $x = np$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $x \notin P_{i,p}$, assim

$$x \neq np + i, \; \forall\, i \in \{1, 2, ..., p-1\} \text{ e } \; n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Ademais, pelo algoritmo da divisão existem $n_0, r \in \mathbb{Z}$, tais que

$$x = n_0 p + r, \;\; \text{com} \;\; 0 \leq r \leq p - 1. \tag{2}$$

Logo, por (1) e (2), para todo $i \in \{1, 2, ..., p-1\}$, segue-se que $n_0 p + r \neq n_0 p + i$, logo $r \neq i$. Assim, resta apenas que $r = 0$ e portanto $x = n_0 p$, mostrando que $x \in P_{0,p}$. ■

Corolário 4.1. *Se p é um número inteiro positivo, então a progressão $P_{0,p}$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 4, sabemos que

$$P_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}.$$

Por outro lado, vimos na Proposição 2 que as progressões aritméticas $P_{i,p}$ são conjuntos abertos. Logo, a união

$$\cup_{i=1}^{p-1} P_{i,p}$$

é um conjunto aberto e consequentemente, seu complementar $P_{0,p}$ é fechado. ■

3.4 A demonstração da infinitude dos números primos

Enfim, chegamos a tão esperada demonstração da infinitude dos números primos utilizando Topologia.

Teorema 1. *O conjunto $\mathbb{P}$ dos números primos é infinito.*

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética (COUTINHO, 2005), todo número m inteiro, diferente de -1 e 1, possui um divisor p_0 primo, assim $m \in P_{0,p_0}$. Consequentemente, de modo geral, podemos escrever

$$\bigcup_{p\in\mathbb{P}} P_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pelo Corolário 4.1, cada progressão $P_{0,p}$ é um conjunto fechado. Logo, se $\mathbb{P}$ fosse finito, então o Corolário 1.1, nos asseguraria que a união finita $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} P_{0,p}$ seria um conjunto fechado, e consequentemente, seu complementar $\{-1, 1\}$, deveria ser um conjunto aberto. Absurdo! Pois, se $\{-1, 1\}$ fosse aberto, então pela Proposição 3, este aberto não vazio deveria ser infinito, o que não é verdade.

Portanto, concluímos que a união $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} P_{0,p}$ não pode ser uma união finita, isto é, o conjunto dos números primos $\mathbb{P}$ é infinito. ■

4. Conclusões

Ao lado da Análise, da Álgebra e da Geometria, a Topologia constitui uma das partes fundamentais da Matemática. De fato, seus conceitos penetraram diversos ramos da Matemática e proporcionaram o desenvolvimento de cada desses ramos, como por exemplo o estudo das Equações Diferenciais e da Geometria Diferencial que carregam muitos aspectos da topologia. No entanto, sua influência é ainda mais abrangente, a exemplo do nosso trabalho, fomos capazes de introduzir uma topologia em um conjunto discreto e, a partir de uma definição de conjunto aberto nada convencional, que foge da nossa intuição, demonstrar o magnífico Teorema de Euclides sobre a infinitude do conjunto dos números primos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi parcialmente financiado pelo FNDE, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - Brasil, por meio da bolsa fornecida para o Grupo PET-Matemática-UFCG, do qual somos integrantes. Agradecemos também ao Tutor Daniel Cordeiro e aos demais integrantes do Grupo PET-Matemática UFCG.

Referências

COUTINHO, S. C. *Números inteiros e criptografia RSA*. [S.l.]: IMPA, 2005. Citado na página 5.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 2011. Citado na página 1.

FURSTENBERG, H. On the infinitude of primes. *The American Mathematical Monthly*, v. 62, n. 5, p. 353, 1955. Citado na página 1.

LIMA, E. L. Curso de análise vol 1. 11a edição. *Rio de Janeiro: IMPA*, 2004. Citado na página 4.

LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral, textos universitários*. [S.l.]: SBM, 2009. Citado na página 2.

POINCARÉ, H. *Analysis situs*. [S.l.]: Gauthier-Villars Paris, France, 1895. Citado na página 1.

ZIEGLER, G. M.; HOFMANN, K. H. *Proofs from the Book*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 1.