UMA DEMONSTRAÇÃO BEM DIFERENTE DO EXCÊNTRICO PAUL ERDÖS

Jonas Barros Lima de Medeiros[1] - jonas.lima@estudante.ufcg.edu.br
Rodrigo Marques Faustino da Silva[1] - rodrigo.marques@estudante.ufcg.edu.br
Daniel Cordeiro de Morais Filho[1] - daniel@mat.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil - Parcialmente Financiado pelo MEC/FNDE/PET

Resumo: *As demonstrações matemáticas são ferramentas utilizadas pelos matemáticos para mostrar a veracidade de algumas sentenças matemáticas, podendo variar em diversos tipos e tecnicidades. Este trabalho tem como objetivo explanar uma demonstração inusitada da infinitude dos números primos feita por um brilhante e excêntrico matemático húngaro, chamado Paul Erdös (1913 - 1996). Com isto, pretendemos alcançar, principalmente os discentes da graduação, estimulando sua curiosidade matemática, exibindo uma demonstração possivelmente ainda não vista, inusitada e que vale a pena ler aos auspícios de seu criador. Esse trabalho foi realizado por meio de uma atividade do Grupo PET-Matemática-UFCG, intitulada "Pesquisa em competências básicas no uso da língua escrita e oral, em idioma estrangeiro e na área de tecnologias de informação e comunicação", na qual o Prof. Tutor Daniel Cordeiro sugeriu uma referência, que foi lida e estudada pelos autores petianos, para que posteriormente fosse desenvolvido, pelo autores, um trabalho, com um conteúdo que tivesse uma abordagem mais acessível, didática e com as notações simplificadas. Vale salientar que, além do presente trabalho ser revisado e lido pelos demais integrantes do PET, foi exposto no Workshop Didático-Pedagógico, com intuito de testar a metodologia que foi usada para torná-lo mais inteligível para um nível de conhecimento dos alunos inciantes dos cursos de Matemática. Por fim, esperamos que os leitores deste trabalho apreciem essa belíssima demonstração da infinitude dos números primos e agreguem mais conhecimento à sua caminhada acadêmica.*

Palavras-chave*: Demonstração Inusitada; Números Primos; Paul Erdös*

1. Introdução

Segundo Filho (2016), uma demonstração matemática é uma cadeia dedutiva de raciocínio que usa argumentos válidos e uma sequência finita de sentenças, que podem ser axiomas, teoremas, definições, hipóteses ou até mesmo uma sentença resultante da anterior. Nesse contexto, podemos ressaltar que nem sempre as demonstrações matemáticas são fáceis de serem compreendidas pelos iniciantes, pois existem casos em que os argumentos são carregados de notações e resultados técnicos ou muito sofisticados. Ainda mais, pela natureza das demonstrações matemáticas, existem diversos tipos delas e, como todas as obras primas, vão das mais simples às mais elegantes demonstrações.

Mostrar que o conjunto dos números primos é infinito pode parecer uma tarefa fácil, como fez parecer o matemático Euclides de Alexandria (300 a.C - desconhecida), que provou essa afirmação utilizando o método de demonstração *ad adsurdum* e um raciocínio extremamente brilhante, até hoje admirado e utilizado (BOYER; MERZBACH, 2010). Segundo Ribenboim (2001), vários matemáticos já demonstraram essa afirmação de formas totalmente distintas, tais como: Ernt Kummer (1810 - 1893), Chales Hermite (1822 - 1901), Christian Goldbach (1690 - 1764), Leonard Euler (1707 - 1783) etc. Porém, neste trabalho, vamos voltar nossos olhos para uma elegante, inesperada e inusitada demonstração feita por um engenhoso matemático húngaro chamado Paul Erdös (1913 - 1996).

Filho de professores de Matemática, em sua infância, Paul Erdös já mostrava seus talentos na Matemática. Segundo Brusamarello e Carmelo (2009), enquanto brincava com os números, após uma pessoa dizer o ano que tinha nascido, ele devolvia rapidamente a quantidade de dias, horas e segundos que ela tinha vivido. Quando adulto, Erdös era bastante conhecido por seu diferente e exótico estilo de vida. Passando por diversos países, trabalhando com os mais variados matemáticos, ele não via prazer em angariar bens materiais devido às suas contribuições, Erdös adaptava-se rapidamente aos diversos ambientes para qual viajava com um único propósito: resolver os problemas "mais difíceis"da Matemática. Erdös deixou diversas contribuições em várias áreas da Matemática, no entanto, trabalhou mais diretamente nas áreas de Teoria dos Números e Análise Combinatória. Segundo Brusamarello e Carmelo (2009), a contribuição desse notável matemático foi tão reconhecida que ele foi homenageado com um número, chamado Número de Erdös, que "mede"a proximidade de um pesquisador que trabalhou com esse matemático.

A demostração que iremos expor neste trabalho pode ser encontrada no livro intitulado: *Proofs From the Book*, (ZIEGLER; HOFMANN, 2014), cuja tradução para o português ficou como "Provas do Livro". Para Erdös, existem demostrações que são consideradas verdadeiras obras de arte, assim, era necessário reunir as melhores e mais elegantes demostrações de cada resultado matemático em um único livro que as contenham, não um livro qualquer, mas "O livro". Além de deixar sua marca registrada neste livro, Paul Erdös indicou demonstrações e soluções de outros matemáticos, entretanto, acabou falecendo antes da publicação do livro.

Passemos à parte matemática de nosso artigo. Podemos evidenciar um fato muito interessante que acontece quando começamos a manipular os números naturais. Observe que, ao olharmos para os inversos dos números naturais, $1/n$ tal que $n \in \mathbb{N}$, podemos deduzir: quanto maior o número n, mais o valor da fração se aproxima de zero. Entretanto, impressionantemente, a sequência das somas parciais da série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

não vai para zero, em verdade, tende para mais infinito. Essa série anterior é muito importante no Cálculo Diferencial e Integral e é chamada de Serie Hârmonica (THOMAS, 2012). Mais surpreendentemente ainda, Erdös, seguindo as ideias da demonstração feita por Euler, (ZIEGLER; HOFMANN, 2014), selecionou os inversos dos números primos e, com o mesmo raciocínio anterior, apostou suas expectativas na divergência dessa parte da Série Harmônica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \dots$$

A aposta de Erdos foi bastante ousada, pois quando selecionamos uma quantidade infinita de números naturais, mas não todos, a série formada pelos inversos dos números selecionados pode convergir ou não para um número real. A saber, se selecionarmos as potências de 2 e considerarmos a série dos inversos desses números, $\sum (1/2)^n$, obtemos uma série geométrica, que sabemos ser convergente. E, assim, Euler abriu um caminho para Erdös exibir uma nova forma de demonstrar a infinitude dos números primos.

Neste trabalho, provaremos que a série dos inversos dos primos diverge e, consequentemente, obteremos uma demonstração da infinitude dos números primos!

2. Metodologia

O presente trabalho é fruto das atividade do Grupo PET-Matemática-UFCG, intitulada: "Pesquisa em competências básicas no uso da língua escrita e oral, em idioma estrangeiro e na área de tecnologias de informação e comunicação", "Workshop Didático-Pedagógico" e "Redação e Participação em Encontros Científicos". Inicialmente, o Prof. Tutor Daniel Cordeiro, indicou uma referência em inglês para que fosse lida e estudada pelos tutorandos. Logo após realizada a leitura e o estudo, os discentes desenvolveram um conteúdo específico, visando trazer uma abordagem mais simplificada e didática do tema tratado, abrandando as notações e, assim, promovendo um melhor entendimento dos resultados. Além disso, em sua fase de escrita, o trabalho foi lido pelos demais integrantes do PET com o intuito de que fossem feitos apontamentos para aprimoramento do texto. Por fim, foi apresentado em outra atividade do Grupo, intitulada como: Workshop Didático-Pedagógico, com o objetivo de testar a metodologia e encontrar uma melhor maneira para ser exposto.

3. Resultado e discussão

Antes de exibir a inesperada demonstração do matemático Paul Erdös sobre a infinitude dos números primos, iremos vislumbrar alguns resultados e definições preliminares para ajudar no entendimento da demonstração do teorema principal.

A partir do Princípio da Boa Ordem, consideremos a sequência dos números primos $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ ordenada de forma crescente. Sejam N e k números naturais fixos a serem escolhidos posteriormente, definamos os conjuntos

$$A_k = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k\} \text{ e } B_k = \{p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_m, \ldots\}.$$

Agora, a partir de A_k e B_k, definamos os conjuntos:

$$D_N^{A_k} := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N \ \text{ e, ou } n = 1 \text{ ou } n \text{ é divisível somente por elementos de } A_k\},$$

$$D_N^{B_k} := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N \ \text{ e } n \text{ é divisível por algum elemento de } B_k\}.$$

Observe que $D_N^{A_k}$ e $D_N^{B_k}$ são finitos, pois os elementos deles também são números naturais menores do que N.

Vejamos a seguinte propriedade entre os conjuntos $D_N^{A_k}$ e $D_N^{B_k}$.

Lema 1: Os conjuntos $D_N^{A_k}$ e $D_N^{B_k}$ são finitos, disjuntos e

$$card(D_N^{A_k}) + card(D_N^{B_k}) = card(D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k}) = N.$$

Demonstração. Observemos que se $n \in D_N^{A_k}$, então n é divisível apenas por elementos de A_k, logo, não é divisível por nenhum elemento de B_k e, assim, $n \notin D_N^{B_k}$. Dessa forma, $D_N^{A_k} \cap D_N^{B_k} = \emptyset$.

Provemos agora que sendo $n \leq N$ natural, temos $n \in D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k}$. Notemos que $1 \in D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k}$. Agora, seja n um número natural tal que $1 \leq n \leq N$, então existe, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, um número primo p_i que divide n. Se n é divisível apenas por números primos de A_k, então $n \in D_N^{A_k}$, caso contrário, existiria um p_i de B_k que dividiria n e, assim, $n \in D_N^{B_k}$. Daí, se $n \leq N$, então $n \in D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k}$. Portanto, o conjunto $\{1, \ldots, N\} \subset D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k}$ e, por definição, $D_N^{A_k}, D_N^{B_k} \subset \{1, \ldots, N\}$. Desse modo, $D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k} = \{1, \ldots, N\}$. Portanto, $card(D_N^{A_k}) + card(D_N^{B_k}) = card(D_N^{A_k} \cup D_N^{B_k}) = N$. ***C.Q.D***

Segundo Filho (2016), pelo Princípio da Contrapositividade, uma sentença $(H \Rightarrow T)$ será válida se, e somente se, sua contrapositiva $({}^{\sim}T \Rightarrow^{\sim} H)$ for válida. Logo, se demonstrarmos $({}^{\sim}T \Rightarrow^{\sim} H)$, temos assegurada a validade de $(H \Rightarrow T)$, onde H é a hipótese e T a tese de uma sentença matemática. Tendo isso em vista, para mostrar que o conjunto dos números primos $\mathbb{P}$ é infinito, basta utilizarmos a seguinte lógica: Se $\mathbb{P}$ é finito, então $\sum \frac{1}{p_i}$ converge. A contrapositiva é:

$$\text{Se } \sum \frac{1}{p_i} \text{ diverge, então } \mathbb{P} \text{ é infinito.}$$

Assim, provaremos que $\sum \frac{1}{p_i}$ diverge, com $p_i \in \mathbb{P}$, e consequentemente, teremos que o conjunto dos números primos é infinito. Vejamos a demostração do resultado principal.

Teorema: O conjunto dos números primos é infinito.

Demonstração. Primeiramente, suponhamos por contradição que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$ converge. Desse modo, obtemos a soma dos últimos termos se aproximando de zero:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \right) = 0.$$

Portanto, pela definição de limite, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k > k_0$, temos

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}. \tag{1}$$

Sejam $k \geq k_0$ fixo e N um número natural fixo. Consideremos os conjuntos $A_k, B_k, D_N^{A_k}$ e $D_N^{B_k}$ conforme definido inicialmente. Mostraremos que, para um número natural N adequado,

$$card(D_N^{A_k}) + card(D_N^{N_k}) < N$$

o que contraria o Lema 1.

Definamos $\lfloor x \rfloor$ como sendo o piso de $x \in \mathbb{R}$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro menor do que ou igual a x. Logo, de (1), segue que

$$\sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2} \Rightarrow \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}, \tag{2}$$

sendo $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ a imagem de $\frac{N}{p_i}$ pela função piso. Agora, estimemos a quantidade de elementos de $D_N^{B_k}$. Se $m \in D_N^{B_k}$, então $m \leq N$ e existe um número primo $p_i \in B_k$ que divide m, logo m é um múltiplo de p_i, com $p_i \in B_k$. Assim, todo elemento de $D_N^{B_k}$ é múltiplo de algum p_i de B_k e é menor do que ou igual a N. Portanto,

$$D_N^{B_k} \subset M := \{rp_i; r \in \mathbb{N}, p_i \in B_k \text{ e } rp_i \leq N\}.$$

Observe que $\left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor$ é a quantidade de múltiplos de p_i menores do que N. Observe também que M é finito, pois, para primos suficientemente grandes, teremos $rp > N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, na soma a seguir, há apenas uma finidade de parcelas não nulas:

$$card(M) = \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \Rightarrow card(D_N^{B_k}) \leq card(M) = \sum \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}. \tag{3}$$

Estimemos a quantidade de elementos de $D_N^{A_k}$. Para auxiliar na estimativa de quantos elementos $D_N^{A_k}$ possui, decomponhamos os elementos m de $D_N^{A_k}$ como produto de números primos, isto é, $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, com $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$, o que é possível pelo Teorema Fundamental da Aritmética (SANTOS, 2003). Utilizando o Algoritmo da Divisão de Euclides, reescrevendo as potências da forma $\alpha_i = 2l_i + \beta_i$, com $l_i \geq 0$ e $\beta_i \in \{0, 1\}$, podemos reescrever m da seguinte maneira:

$$m = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}) \cdot (p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{l_k})^2 = a_m \cdot b_m^2,$$

onde $a_m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ e $b_m = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{l_k}$. Pelo fato de que $m \in D_N^{A_k}$ e a_m ser livre de quadrados, segue-se que a_m é o produto de diferentes elementos de A_k e $a_m \leq a_m b_m^2 = m \leq N$. Concluímos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, que existem até 2^k diferentes números a_m livres de quadrado. Ou seja, a quantidade de termos $Q(a_m)$ de a_m cumpre

$$Q(a_m) \leq 2^k. \tag{4}$$

Daí, encontramos uma cota superior para $Q(a_m)$.

Agora, note que

$$a_m \geq 1 \Rightarrow a_m b_m^2 \geq b_m^2 \Rightarrow m \geq b_m^2 \Rightarrow b_m \leq \sqrt{m}.$$

Ainda mais, como $m \leq N$, verifica-se

$$\sqrt{m} \leq \sqrt{N} \Rightarrow b_m \leq \sqrt{m} \leq \sqrt{N}.$$

Daí, encontramos uma conta superior para a quantidade $Q(b_m)$ de possíveis b_m. A saber:

$$Q(b_m) \leq \sqrt{N}. \tag{5}$$

De (4) e (5) segue-se que

$$Q(a_m) \leq 2^k \text{ e } Q(b_m) \leq \sqrt{N} \Rightarrow card(D_N^{A_k}) = Q(a_m) \cdot Q(b_m) \leq 2^k \sqrt{N}.$$

Recordando que $card(D_N^{B_k}) \leq \frac{N}{2}$, resta encontrar um N natural tal que

$$card(D_N^{A_k}) = 2^k\sqrt{N} \leq \frac{N}{2}.$$

Ou seja, precisamos encontrar um N tal que

$$2^k\sqrt{N} \leq \frac{N}{2} \Leftrightarrow 2^{k+1}\sqrt{N} \leq N \Leftrightarrow 2^{2(k+1)}N \leq N^2 \Leftrightarrow 2^{2(k+1)} \leq N.$$

Com essa finalidade, basta tomar $N = 2^{(2k+2)}$, que, por conseguinte,

$$card(D_N^{B_k}) < \frac{N}{2} \text{ e } card(D_N^{A_k}) \leq \frac{N}{2} \Rightarrow card(D_N^{A_k}) + card(D_N^{B_k}) < \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N.$$

O que contraria o Lema 1. Portanto, o conjunto dos números primos é infinito. ***C.Q.D***.

4. Conclusões

O presente trabalho possibilitou que os petianos envolvidos treinassem e aperfeiçoassem suas habilidades na língua estrangeira inglês, através de uma elegante e criativa demontração feita pelo excêntrico matemático Paul Erdös. Além disso, com a tradução e simplificação das notações, eles também puderam trabalhar a parte de redação e escrita matemática aguçando, assim, suas habilidades para redigir demonstrações. Ainda mais, pôde-se aperfeiçoar as habilidades pedagógicas a fim de tornar a demonstração original mais acessível e atraente para os alunos iniciantes nos cursos de Matemática.

A demonstração vista é um tanto inusitada, pois Paul Erdös colocou todas as suas apostas nos ensinamentos do grande mestre Euler, que também demonstrou a infinitude dos números primos. Ainda mais, ao fazer a própria demonstração da infinitude dos números primos, inspirado por Euler, provando a divergência da série dos inversos dos números primos, Erdös utilizou técnicas e ferramentas belíssimas que nos faz abrir a mente admirando-se com essa inusitada criatividade.

Agradecimentos

O presente trabalho foi parcialmente financiado pelo FNDE, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - Brasil, por meio da bolsa fornecida para o Grupo PET-Matemática-UFCG, do qual somos integrantes. Particularmente, agradecemos ao nosso Prof. Tutor Daniel Cordeiro que, com muito entusiamo, nos apresentou essa belíssima demostração, e nos guiou sabiamente, sendo imprescindível em seus apontamentos. Ainda mais, agradecemos imensamente aos nossos colegas de Grupo que demandaram do seu tempo e energia para revisar e tecer sugestões de aperfeiçoamentos para melhoria do nosso trabalho.

Referências

BOYER, C.; MERZBACH, U. C. *A History of Mathematics*. United States of America: Jhon Wiley Sos, 2010. Citado na página 1.

BRUSAMARELLO, R.; CARMELO, E. L. M. Paul erdös, o mago. *Matemática Universitária*, v. 43, p. 74–81, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

FILHO, D. C. D. M. *Um Convite à Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.

RIBENBOIM, P. *Números Primos: Mistérios e Recordes*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. Citado na página 1.

SANTOS, J. P. D. O. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. Citado na página 4.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Citado na página 2.

ZIEGLER, G. M.; HOFMANN, K. H. *Proofs From the Book*. United States of America: Springer, 2014. Citado na página 2.