UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE - UFCG
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - CCT
UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - PET

TUTOR: PROF. DR. DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO

BOLSISTA: GEOVANY FERNANDES PATRICIO

INTRODUÇÃO AOS FRACTAIS:
Os fantasmas da Matemática

CAMPINA GRANDE
2014

Fractais

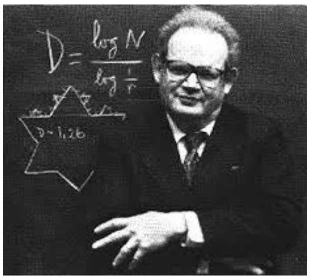
1. Introdução

1.1 Motivação

Vivemos em um mundo em que sempre nos deparamos com objetos, sons e formas irregulares e isso tudo tentamos de alguma maneira descrever ou associar esses objetos a formas geométricas conhecidas bem como quadrados, retângulos, círculos, esferas, cones, triângulos e etc. Entretanto como descrever, usando essa geometria, a estruturas das árvores, as formas das nuvens ou encontrar um padrão no curso sinuoso de um rio ou na turbulência que as turbinas de um avião geram ao voar? Será que existe uma ordem no meio desse mundo aparentemente irregular e caótico? A resposta é sim, e para isso vamos recorrer das propriedades de uma geometria não muito usual chamada Geometria Fractal.

Curso sinuoso de um rio

Turbulência provocada por aviões

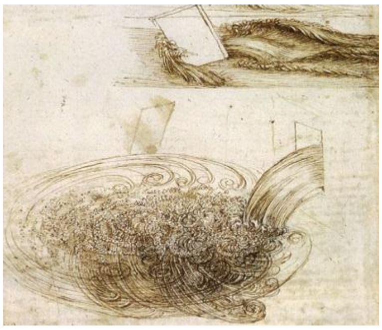


O termo Fractal foi proposto por Benoit Mandelbrot em 1975, o grande responsável por essa teoria bem como o termo “Fractal” em que “fractus” vem do latim que significa “irregular” ou “quebrado” e, além disso, ele foi o responsável por descrever o mundo da forma como ele é usando esse novo conceito.

Existem vestígios de algumas formas que lembram fractais na antiguidade para isso vamos então voltar um pouco no passado e ver que os egípcios já “utilizavam” os padrões fractais simples. Na Índia encontram-se arquiteturas antigas com o mesmo padrão bem como na idade média e até Leonardo da Vinci estudou os efeitos relacionados à turbulência, esses fatos mostram até então o uso e estudo “inconsciente” desses objetos bem antes da teoria ser consolidada e apresentada formalmente para o Mundo.

Pintura da idade média

Arquitetura Indiana



Turbulência das águas

1.2 O conceito de fractal

Até o momento não se conhece uma definição formal do que seja um fractal e o que temos são apenas alguns conceitos e noções desses objetos bem como; “*Fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando auto-semelhança e complexidade infinita*“. (MANDELBROT, Benoit B., The fractal geometry of nature. New York. W.H. Freeman and Company, 1982).

Uma noção de como procede à construção de um fractal e algumas de suas propriedades principais que são: ***auto-semelhança*** é a simetria através das escalas, um objeto possui auto-semelhança quando possui o mesmo aspecto em qualquer escala de observação *e* ***complexidade infinita*** em que podemos repetir um mesmo processo infinitas vezes e posteriormente vem sua **dimensão** onde se verifica valores não inteiros.

Os fractais estão diretamente relacionados com a natureza e suas formas, isso faz sentido, pois com a geometria usual não conseguimos descrever as ramificações de uma árvore nem o comportamento de certos fenômenos naturais bem como o curso sinuoso de um rio e estudar o caminho feito por um raio, por trás de tudo isso existe todo um esquema e padrões matemáticos que são estudados e analisados usando a geometria fractal.

1.3 Como surgiu a ideia de fractal

A ideia dos fractais teve a sua origem nos trabalho de alguns Matemáticos entre 1857 e 1913. Em 1872 surge a primeira pessoa a dar um exemplo de uma construção analítica de uma função que é contínua, mas em parte alguma diferenciável que foi Karl Weierstrass. O aspecto do gráfico desta função é chamado atualmente de fractal. Em 1904, Helge Von Koch, não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma curva similar ao gráfico desta função, atualmente conhecida como Koch Snowflake (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados o perímetro cresce e fatalmente se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito.

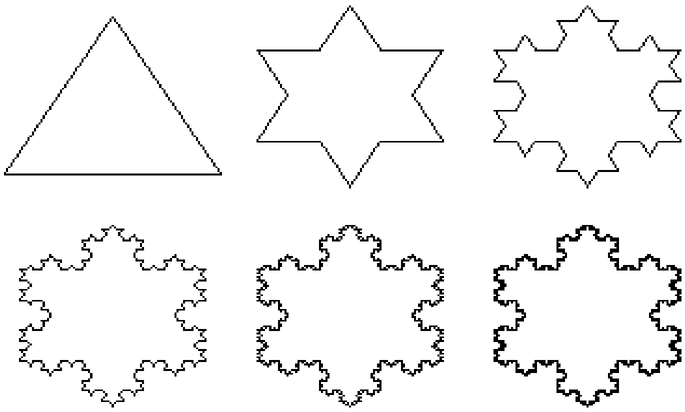
Bem até agora apenas foi relatado algumas informações sobre esses objetos tão estranhos e curiosos, você deve estar se perguntando “que aparência tem, que propriedades possuem e que regras são utilizadas para obter certos fractais?”. Sendo assim, vamos agora conhecer e estudar os fractais na sua forma geométrica e algébrica.

1.2 Alguns tipos de fractais

1.2.1 O floco de neve de Koch

O "Floco de Neve de Koch" foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito. A construção desse fractal é bem simples:

Primeiro considera-se um triângulo equilátero e depois cada lado do triângulo é dividido em três partes iguais onde se retira o terço médio de cada lado e constroem-se novos triângulos em cada lado do triângulo original e assim sucessivamente como mostra o esquema abaixo.



Considere um triângulo equilátero com cada lado medindo 1. Por recorrência vamos obter uma expressão para o perímetro de cada região formada após as interações, ou seja,

$$P_0 = 3, P_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}, P_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^2}, \dots, P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dessa forma

$$\lim_{n \to \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

E a área da região?

Recursivamente temos:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}, A_2 = A_1 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}, \dots, A_i = A_0 \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right]$$

Veja que,

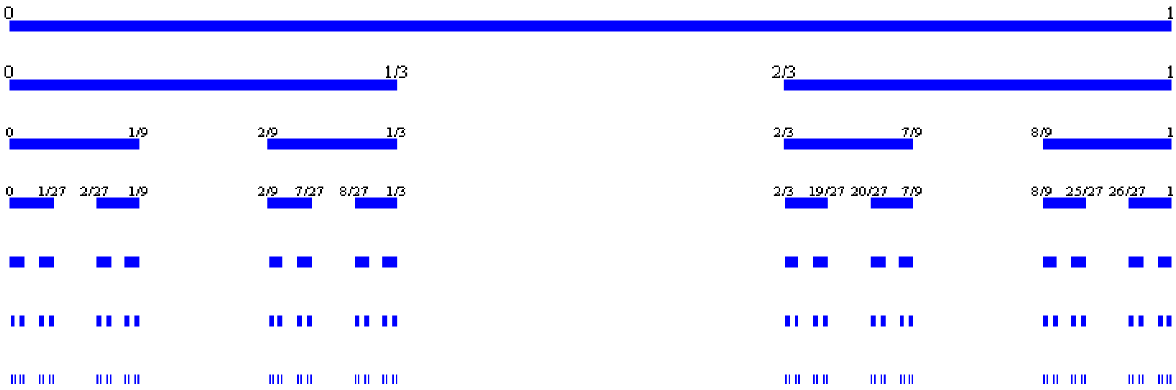
$$\lim_{i \to \infty} A_i = A_0 \cdot \left[1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i\right] = \frac{8}{5} A_0$$

e assim, temos uma região de perímetro infinito, mas de área limitada, ou seja, podemos ter uma região de perímetro tão grande como se queira mas com uma área limitada.

1.2.2. O conjunto de Cantor

Georg Cantor conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos em que a partir desta teoria chegou ao conceito de número transfinito, incluindo as classes numéricas dos cardinais e ordinais e estabelecendo a diferença entre estes dois conceitos, que colocam novos problemas quando se referem a conjuntos infinitos e criador do conjunto de cantor conhecido também por “poeira de cantor”. O conjunto de Cantor é um engenhoso exemplo de um subconjunto da reta que é compacto, não enumerável e totalmente desconexo, que serve como fonte de exemplos interessantes em análise e topologia. Um dos estranhos fractais que simplesmente foge do alcance da intuição humana devido as suas características peculiares, além das citadas acima, o conjunto de cantor tem medida nula.

Na construção do Conjunto de Cantor começamos com o segmento que representa o intervalo fechado [0,1], dividimos este segmento em três partes e retiramos o terço médio ficando com os outros dois terços extremos, repetimos depois o mesmo



procedimento com cada um dos segmentos restantes, sempre retirando o terço médio de cada divisão. Os quatro segmentos restantes sofrerão o mesmo processo de divisão e retirada do terço médio, dando origem a oito segmentos cada vez menores e assim fazemos indefinidas vezes para os restantes dos intervalos como podemos ver na ilustração acima.

Se examinarmos quais os pontos que restam após o processo infinito de construção do conjunto, observamos que os pontos extremos dos diversos segmentos, obtidos em qualquer etapa da construção do Conjunto de Cantor, estarão sempre presentes até o fim.

O conjunto de cantor tem tamanho "nulo" ou zero observe que em cada etapa retiramos um terço de cada intervalo assim se fizermos isso *n-vezes* estaremos retirando

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}$$

em que R é a soma do tamanho dos intervalos retirados após $\boldsymbol{n}$ etapas.

Podemos observar que se fizermos $\boldsymbol{n}$ tender para o infinito vamos ter

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}$$

e assim vamos obter uma serie Geométrica de razão menor que 1, ou seja, o valor de R é:

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

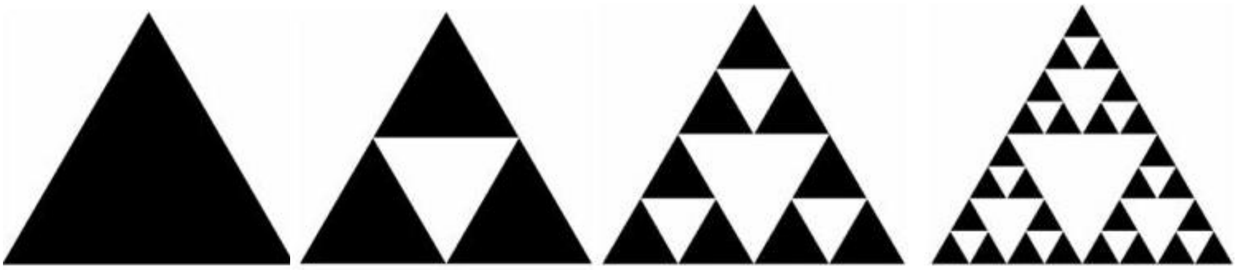
Assim o tamanho T do conjunto de cantor, é:

$$T = 1 - R = 0$$

Pois o tamanho inicial do intervalo [0,1] é 1.

1.2.4. Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclaw Sierpinski (1882-1969). É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, visto que um destes triângulos está invertido, em relação ao original e é retirado do triângulo original sobrando apenas os outros três. Assim, repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente.



Figuras feitas pelo autor no Geogebra

Interações	Triângulos Retirados	Área de cada Triângulo retirado
1	$1 = 3^0$	$\frac{1}{4} \cdot A_0$
2	$3 = 3^1$	$\frac{1}{16} \cdot A_0$
3	$9 = 3^2$	$\frac{1}{64} \cdot A_0$
4	$27 = 3^3$	$\frac{1}{256} \cdot A_0$
⋮	⋮	⋮
n	3^{n-1}	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot A_0$

Assim, podemos representar a área dos triângulos removidos $\boldsymbol{A_r}$ após $\boldsymbol{n}$ interações pelo seguinte somatório:

$$A_r = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \cdot A_0 = \frac{A_0}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

sendo A_0 a área do triângulo equilátero inicial. Se fizermos infinitas interações vemos que a parte do somatório de $\boldsymbol{A_r}$ é uma P.G de razão menor que 1**,** assim temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 3$$

E assim temos que a área do triângulo após infinitas interações é:

$$A = A_0 - A_r = A_0 - \frac{A_0}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = A_0 - \frac{A_0}{3}\cdot 3 = A_0 - A_0 = 0$$

Algo que surpreende, pois sempre podemos por infinitas vezes remover triângulos e mesmo assim mostramos que vamos ter uma região de área nula, ou seja, esse é o surpreendente mundo do infinito.

1.4 A Dimensão de um fractal

Das características que definem um fractal, a mais importante é a dimensão fracionaria de alguns fractais, é por isso que são descritos como os “Fantasmas Matemáticos de Dimensão Fracionária”, podemos dizer que Fractais são formas complexas que não podem ser medidas apenas por dimensão topológica. A literatura fornece diversas abordagens para se estimar a Dimensão Fractal de um objeto ou imagem, no entanto a grande maioria delas se baseia na Dimensão Hausdorff.

Para entender a Dimensão Hausdorff considere uma linha de comprimento L e outra de comprimento u, de modo que $L > u$. Sobrepondo a linha u sobre a linha L até “cobri-la” completamente, encontra-se um valor $N = \frac{L}{u}$·, de modo análogo podemos fazer para um quadrado de lado L, obtendo-se a relação $N = \left(\frac{L}{u}\right)^2$ e assim podemos estender o mesmo raciocínio para um cubo chegando a relação $N = \left(\frac{L}{u}\right)^3$ e isso nos leva a uma relação do tipo:

$$N = \left(\frac{L}{u}\right)^D$$

Onde $\boldsymbol{D}$ indica a dimensão do objeto. Aplicando o logaritmo em ambos os lados temos que,

$$D = \frac{log(N)}{log\left(\frac{L}{u}\right)}$$

$Onde,$

N: $Número\ de\ cópias\ que\ cada\ “segmento”\ ou\ região\ forma$;

L: $Tamanho\ inicial\ do$ "segmento" $ou\ medida\ do\ lado\ da\ região\ estudada$;

u: $tamanho\ de\ cada$ "segmento" $da\ região\ em\ relação\ ao\ anterior$.

1.4 Algumas dimensões de Fractais Famosos.

1.4.1 O cálculo da dimensão do floco de Neve de Koch

Após a primeira interação cada lado, do triângulo unitário, formam 4 novos segmentos e cada segmento é $\frac{1}{3}$ do anterior, ou seja, $L = 1$, $u = \frac{1}{3}$, $N = 4$ assim temos:

$$D = \frac{log(4)}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{log(4)}{log(3)} \cong 1{,}262$$

1.4.2 O cálculo da dimensão do Conjunto de Cantor

$L = 1, \qquad N = 2, \qquad u = \frac{1}{3}$

$$D = \frac{log(2)}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{log(2)}{log(3)} \cong 0{,}631$$

1.4.3 O cálculo da dimensão do triângulo de Sierpinski

Temos que,

$$L = 1, \qquad N = 3, \qquad u = \frac{1}{2}$$

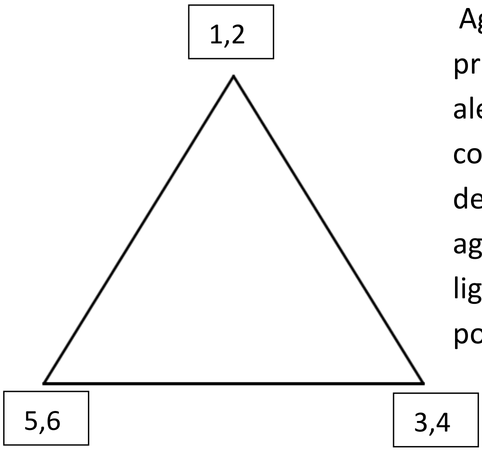
$$D = \frac{log(3)}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{log(3)}{log(2)} \cong 1{,}585$$

A partir dessas observações das dimensões podemos notar que alguns desses objetos estranhos estão em dimensões entre 0 e 1, 1 e 2, mas existem fractais de dimensão inteira um exemplo é a curva de Peano ou “A curva que preenche o quadrado”. Como já discutido antes essa é uma propriedade marcante dos fractais.

O estudo de fractais é bastante diversificado, pois podemos trabalhar forma, dimensão, área, perímetro, volume, semelhança de figuras, sucessões e interação de funções e etc.

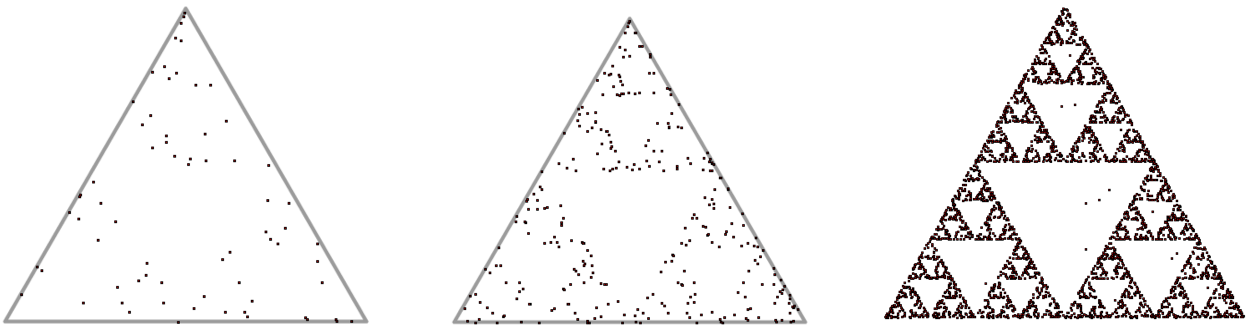
1.5 O Jogo do Caos

O jogo começa com um triângulo equilátero com os três vértices etiquetados com o número (1,2) no primeiro vértice, (3,4) no segundo vértice e (5,6) no terceiro vértice como mostra a figura abaixo.



Agora escolha um ponto qualquer dentro ou fora do triângulo, o próximo passo é utilizar um dado para que possa ser jogado aleatoriamente e assim ser sorteado um número das seis faces e com isso fazer corresponder ao vértice que se encontra o mesmo, depois ligue, por uma reta, o ponto ao vértice que foi sorteado, agora marque o ponto médio dessa reta, jogue o dado novamente e ligue o ponto médio ao vértice sorteado e novamente marque o ponto médio dessa reta e assim por diante.

Com o auxilio do geogebra, após vários passos, temos as seguintes imagens:



141 Interações 390 Interações 692 Interações

Veja que a figura formada são triângulos dentro de triângulos e esses triângulos dentro de triângulos formam um fractal chamado Triângulo de Sierpinski, que já estudamos anteriormente.

Referências Bibliográficas.

[1] MANDELBROT, Benoit B., The fractal geometry of nature. New York. W.H. Freeman and Company, 1982.

[2] SILVA, M. M., SOUZA, W. A.. Dimensão Fractal. Revista Eletrônica de Matemática, n. 2, 2010. Disponível em: < www2.jatai.ufg.br/ojs/index.php/matematica> . Acesso em: 6 Jan. 2014.

[3] STEWART, I.Almanaque das Curiosidades matemáticas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

[4] CARREIRA, A .S.N. et. al. Fractais. Disponível em: <http//:www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000 /icm24/principal.htm> Acesso em 17 Dez. 2013.

[5] Chaos of Game. GeogebraTube<http://www.geogebratube.org/material/show/id/8896>. Acesso em 02 de Fev. 2014.

[6] Wikipédia <http://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor>. Acesso em 3 Jan. 2014.

[7] Wikipédia < http://pt.wikipedia.org/wiki/Waclaw_Sierpinski>. Acesso em 12 Jan.2014.