UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

BOLSISTA: MICHELL LUCENA DIAS

TUTOR: PROF. DR. DANIEL CORDEIRO DE MORAES FILHO

O PROBLEMA DAS VACAS DE ISAAC NEWTON

CAMPINA GRANDE, 2011

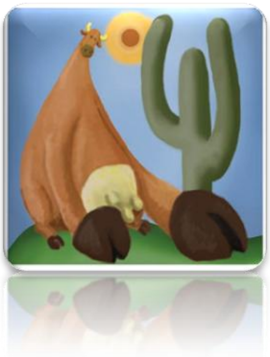
O Problema das Vacas de Isaac Newton

Introdução

Isaac Newton (1643-1727) foi uma das figuras mais marcantes da ciência, sobretudo por suas contribuições na ótica, na lei da gravitação universal, na alquimia, e nas leis do movimento, dentre outras. O cientista inglês, desde suas primeiras publicações, buscava se aprofundar nos estudos sobre a natureza e suas leis. De forma geral, o legado de suas pesquisas possibilitou o surgimento de várias áreas do conhecimento.

Alguns episódios hilários, quase folclóricos, envolvendo Newton são bastante populares, como a famosa queda da maça, e a briga com um colega ainda na escola que o fez decidir ser o melhor aluno da instituição onde estudava. Os interessados nessas histórias podem acessar a bibliografia [3].

Newton, apesar da fama de ser introspectivo e de difícil temperamento, possuía um talento ímpar para solucionar problemas de cunho matemático. Em uma de suas publicações, *Arithmetica Universalis* (1707), um interessante problema foi apresentado pelo cientista inglês, enunciado da seguinte forma:



"*a* vacas pastam *b* campos em *c* dias
a' vacas pastam *b'* campos em *c'* dias
a'' vacas pastam *b''* campos em *c''* dias"

Assumindo que todos os campos possuem a mesma quantidade de grama, que o crescimento diário da grama é constante e que cada vaca come a mesma quantia todos os dias, pergunta-se:

Qual a relação existente entre as grandezas: a, a', a", b, b', b", c, c' e c"?

Destacamos ainda que a solução que discutiremos a seguir é a solução original dada pelo próprio Newton.

Solução

Neste primeiro momento, para encontrar uma solução para este enunciado, devemos modelar matematicamente o problema em questão. Diante disso e das informações iniciais, podemos elencar as seguintes observações:

1. Na manhã de cada dia, quando as vacas dão início à sua rotina matutina, já existe uma quantidade inicial de grama nos campos;
2. Todos os dias, as vacas comem a mesma quantidade de grama;
3. A grama cresce a uma velocidade constante todos os dias;
4. Após certo número de dias as vacas comerão toda a grama de todos os campos.

Diante dessas informações, considere as seguintes incógnitas:

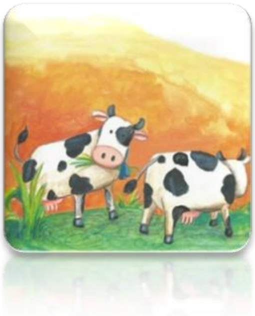
I: quantidade inicial de grama num campo;
E: quantidade que cada vaca comeu de grama;
H: quantidade de grama que cresceu num campo.

Assim, de acordo com as observações dispostas acima, é fácil observar que a quantidade de grama nos campos ao fim do primeiro dia será:

$$Ib + Hb - Ea$$

Ou seja, as vacas pastaram apenas uma porção da grama que já havia nos campos e da grama que cresceu durante o dia.

Verificando a quantidade de grama restante nos campos na noite do segundo dia (caso $c = 2$), podemos notar que, desta vez, a parcela inicial é igual a quantidade de grama que não foi comida no dia anterior. Portanto:



$$(Ib + Hb - Ea) + (Hb - Ea) = Ib + 2Hb - 2Ea$$

Para o caso $c = 3$, ou seja, na noite do terceiro dia deveremos ter:

$$(Ib + 2Hb - 2Ea) + (Hb - Ea) = Ib + 3Hb - 3Ea$$

Adotando esta linha raciocínio, na noite do c-ésimo dia, quando as vacas tiverem pastado totalmente os campos, chegaremos à seguinte expressão:

$$Ib + Hbc - Eac = 0$$

E, analogamente, decorrem as seguintes equações:

$$Ib' + Hb'c' - Ea'c' = 0$$
$$Ib'' + Hb''c'' - Ea''c'' = 0.$$

De acordo com a modelagem que fizemos, passamos então a observar o problema com um novo olhar, pois chegamos a um sistema de três equações com três incógnitas (I, B e H) e, para que possamos encontrar uma única expressão envolvendo as nove grandezas em questão, basta resolver o seguinte sistema homogêneo:

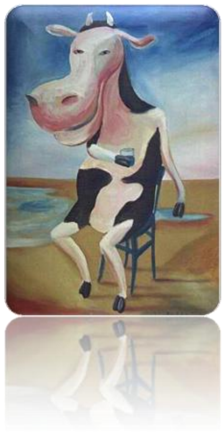
$$\begin{cases} (1)\ Ib + Hbc - Eac = 0 \\ (2)\ Ib' + Hb'c' - Ea'c' = 0 \\ (3)\ Ib'' + Hb''c'' - Ea''c'' = 0. \end{cases}$$

Multiplicando (1) por $b'c'$ e (2) por bc, vem:

$$\begin{cases} (I)\ Ibb'c' + Hbb'c' - Eab'cc' = 0 \\ (II)\ Ibb'c + Hbb'cc' - Ea'bcc' = 0. \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II), temos:

$$Ibb'(c'-c)+Ecc'(a'b-ab')=0$$
$$I=\frac{Ecc'(ab'-a'b)}{bb'(c'-c)}.$$



Multiplicando, agora, (1) por b' e (2) por b, chegamos a:

$$\begin{cases} Ibb'+Hbb'c-Eab'c=0 \\ Ibb'+Hbb'c'-Ea'bc'=0. \end{cases}$$

De onde segue:

$$Hbb'(c-c')+E(a'bc'-ab'c)=0$$
$$H=\frac{E(a'bc'-ab'c)}{bb'(c'-c)}.$$

Finalmente substituindo os valores de I e H, encontrados acima, na equação (3), obteremos nossa desejada relação.

$$\left[\frac{Ecc'(ab'-a'b)}{bb'(c'-c)}\right]b''+\left[\frac{E(a'bc'-ab'c)}{bb'(c'-c)}\right]b''c''-Ea''c''=0.$$

Simplificando a expressão anterior, chegamos à:

$$b''cc'(ab'-a'b)+b''c''(a'bc'-ab'c)-a''bb'c''(c'-c)=0. \qquad (4)$$

Uma versão moderna para a solução do problema das vacas de Isaac Newton

Newton, embora fosse um grande gênio, não tinha aparatos matemáticos que possibilitassem uma solução mais imediata para este tipo de problema que, apesar de simples, exige um trabalho manipulativo visto durante a solução apresentada acima.

Em sua época, não se tinha o conhecimento moderno da teoria dos determinantes, tão básica e tão útil nestas situações. O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 em uma publicação de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), no qual sumarizou e simplificou os resultados que já eram conhecidos até então.

À luz da linguagem dos determinantes, pode-se mostrar que um sistema linear homogêneo com n equações e n incógnitas têm solução não trivial, se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero (LIPSCHUTZ, 1994).

Assim, como temos um sistema com 3 equações e 3 incógnitas (I,H e E), o sistema terá solução não-nula se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} b & bc & ac \\ b' & b'c' & a'c' \\ b'' & b''c'' & a''c'' \end{bmatrix} = 0.$$

Note que a expressão final – equação (4) – é justamente essa última igualdade.

Bibliografia

[1] DORRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications - 1965.

[2] LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear: Teoria e Problemas*. – 3ª Ed. – São Paulo: Makron Book, 1994. (Coleção Schaum.)

[3] http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/Biografias/Newton/Newtonospri.htm (acessado em 15 de dezembro de 2010).

[4] http://matematiques.sites.uol.com.br/historiasitemadeterminantes.htm (acessado em 15 de dezembro de 2010).