Universidade Federal de Campina Grande
Unidade Acadêmica de Matemática

Semana de Matemática

Transformação $\frac{1}{z}$

Geovany Fernandes Patricio (Bolsista PET-Matemática)[1], Aparecido Jesuíno de Souza *(Orientador da Iniciação)* [2]

[1] UFCG/CCT/UAMAMT/ Bolsista do PET - Matemática - UFCG – email: geovany@dme.ufcg.edu.br

[2] UFCG/CCT/UAMAT/Professor da UAMAT – email: cido@mat.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

. No ensino básico vemos que as principais relações, como domínio e imagem, aparecem sempre como subconjuntos do conjunto dos reais ou dos inteiros, em geral não há lugar no currículo para as funções cujo domínio são partes do plano ou do espaço. Assim, função não tem relação com movimento e transformação de figuras planas. O estudo das funções complexas traz a possibilidade de estabelecer tais articulações.As transformações geométricas podem ser vistas como funções complexas, que podem ser representadas por fórmulas, regras e gráficos assim as funções complexas podem expressar movimentos ou transformações de figuras planas.

OBJETIVOS

Nosso trabalho aborda uma função "especial" que possui algumas propriedades incríveis bem como rotação, translação e expansão .

METODOLOGIA

O desenvolvimento se deu através de leituras de livros assim como a orientação do tutor e exposições do conteúdo para o mesmo e a aplicação da teoria no ***Software Geogebra.***

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Definição: Sejam *a, b, c* e *d números complexos com* $ad - bc \neq 0$, *então a função complexa definida por*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+b}$$

é chamada uma **transformação de Möbius.**

Se $c = 0$, então a transformação de Möbius $T(z)$ é uma transformação linear afim; logo, toda aplicação linear afim é uma transformação de Möbius. Temos ainda que qualquer transformação de Möbius é dada por compostas de transformações lineares afins e da função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Proposição 1: A função $f(z) = \frac{1}{z}$ leva o eixo real estendido no eixo real estendido e o eixo imaginário estendido no eixo imaginário estendido. ***Demonstração***: Claramente

$$f(x+i0) = \frac{1}{x+i0} = \frac{1}{x}$$

logo f leva o eixo real estendido no eixo real estendido. A análise para o eixo imaginário é totalmente análoga. ■

Proposição 2: (Retas verticais com $x_0 \neq 0$). Seja $r = \{z = x_0 + iy\}$ uma reta vertical qualquer no plano complexo estendido com $x_0 \neq 0$. Então a imagem de r pela função $f(z) = \frac{1}{z}$ é um círculo contendo o ponto $z = 0$. ***Demonstração:*** Temos

$$f(x_0+iy) = \frac{1}{x_0+iy} = \frac{x_0-iy}{{x_0}^2+y^2}$$

e por cálculos simples podemos mostrar que

$$\left|f(x_0+iy) - \frac{1}{2x_0}\right| = \frac{1}{|2x_0|}$$

e portanto a imagem da reta r por f é um círculo. Como a reta r é ilimitada, o ponto ∞ do plano complexo estendido pertence à r e como $f(\infty) = 0$, segue que 0 pertence ao círculo. ■

Proposição 3: (Retas horizontais com $y_0 \neq 0$). Seja $r = \{z = x + iy_0\}$ uma reta horizontal qualquer no plano complexo estendido com $y_0 \neq 0$. Então a imagem de r pela função $f(z) = \frac{1}{z}$ é um círculo contendo o ponto $z = 0$. ***Demonstração:*** Análoga à proposição anterior, obtemos

$$\left|f(x+iy_0) + \frac{1}{2y_0}\right| = \frac{1}{|2y_0|} \qquad ■$$

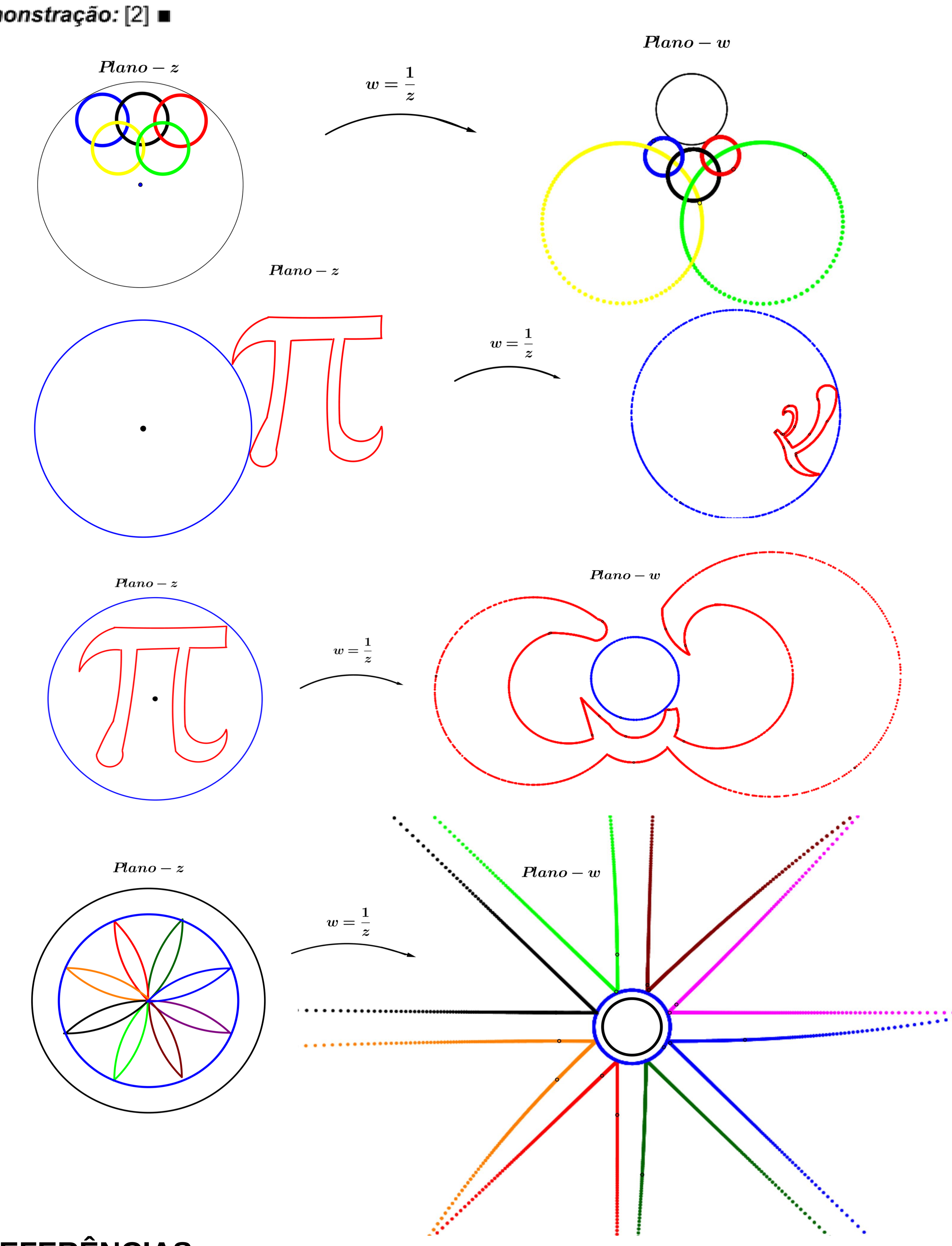
Agora o próximo passo é ver como a função $f(z) = \frac{1}{z}$ age sobre círculos.

Proposição 4: (Círculos contendo 0). Seja C um círculo no plano complexo com $0 \in C$. Então $f(z) = \frac{1}{z}$ leva C em uma reta horizontal ou vertical. A demonstração segue das proposições anteriores.■

Proposição 5: (Círculos centrados em 0). A função $f(z) = \frac{1}{z}$ leva círculos centrados em 0 em círculos centrados em zero. ***Demonstração:***

Seja $C = \{z = e^{i\theta}: \theta \in [0, 2\pi]\}$, para algum $r > 0$. Assim $f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = r^{-1}e^{-i\theta}$, que está no círculo de raio r^{-1} centrado em 0.■

Proposição 6: (Círculos não contendo e não centrados em 0). A função $f(z) = \frac{1}{z}$ leva círculos não contendo e não centrados em 0 em círculos não contendo e não centrados em 0. ***Demonstração:*** [2] ■



REFERÊNCIAS

[1] R. V, Churchill. Variáveis Complexas e Suas Aplicações. Ed. Mc Graw Will do Brasil. São Paulo: Ed. da USP, 1975.
[2] MATHEUS CHEQUE BORTOLAN, L.J. Notas de aula MTM5186 , Florianópolis – SC, Brasil, 2015. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~bortolan/grad/MTM5186/NotasdeAulaMTM5186>. Acessado em: 03 de Outubro de 2015.
[3] Geraldo S.S. Ávila "Funções de uma Variável Complexa" - IMPA.