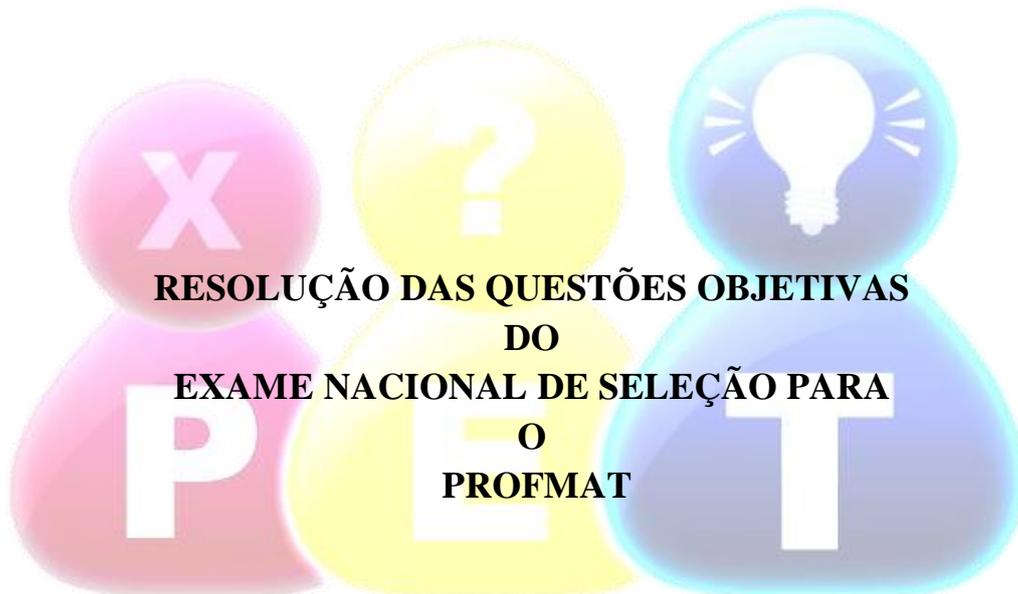




**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
(UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA)
PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL
TUTOR: PROF. DR. DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO**



EQUIPE DE BOLSISTAS QUE RESOLVERAM A PROVA:

- Alan de Araújo Guimarães
- André Felipe Araújo Ramalho
- Arthur Cavalcante Cunha
- Jogli Gidel da Silva Araújo
- Lorena Brizza Soares Freitas
- Mário Sérgio Alves Ferreira
- Matheus Cunha Motta
- Michell Lucena Dias
- Ygor Dias A. Torquato.

APRESENTAÇÃO

Campina Grande, 28 de fevereiro de 2011

É com satisfação que o Grupo PET-Matemática-UFCG disponibiliza para nossos colegas de todo o país a resolução das questões objetivas do Exame Nacional de Admissão do PROFMAT, ao qual se submeteram milhares de professores.

Sob nossa orientação e supervisão, nossos bolsistas PET resolveram a prova e redigiram as soluções da maneira mais natural, sem procurar soluções geniais ou mirabolantes. Os parabéns por aceitarem mais esse desafio, realizado em um curto intervalo de tempo.

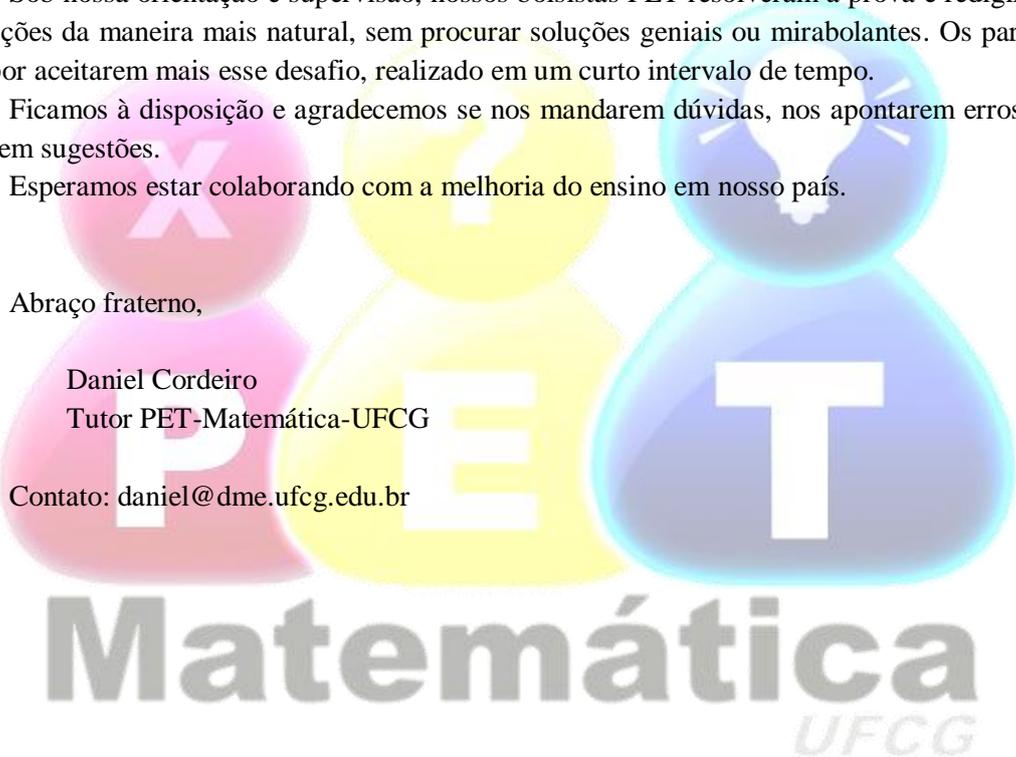
Ficamos à disposição e agradecemos se nos mandarem dúvidas, nos apontarem erros e enviarem sugestões.

Esperamos estar colaborando com a melhoria do ensino em nosso país.

Abraço fraterno,

Daniel Cordeiro
Tutor PET-Matemática-UFCG

Contato: daniel@dme.ufcg.edu.br



Matemática
UFCG

BIBLIOGRAFIA:

Manual de Redação Matemática: Com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação.

www.fabricadeensino.com.br

Questão 1

O número $27^{-2/3}$ é igual a:

- a) $1/18$ b) $1/81$ c) $1/9$ d) -18 e) 9

 **Resolução:**

Temos,

$$27^{-2/3} = \frac{1}{27^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3^2)^3}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Resposta: **alternativa C.**

Questão 2

Um pacote de biscoitos tem 10 biscoitos e pesa 85 gramas. É dada a informação de que 15 gramas de biscoito correspondem a 90 *kcal*. Quantas quilocalorias têm cada biscoito?

- a) 38 *kcal* b) 43 *kcal* c) 46 *kcal* d) 51 *kcal* e) 56 *kcal*

 **Resolução:**

Se 10 biscoitos pesam 85 gramas, então cada biscoito pesa 8,5 gramas. Se 15 *g* de biscoito correspondem a 90 *kcal*, então um grama corresponde a

$$\frac{90}{15} = 6 \text{ kcal.}$$

Logo, cada biscoito tem $8,5 \times 6 = 51 \text{ kcal}$.

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 3

No dia do aniversário de João em 2010, uma pessoa perguntou a idade dele. João respondeu: “se eu não contasse os sábados e os domingos da minha vida, eu teria 40 anos de idade”. João nasceu no ano de:

- a) 1946 b) 1954 c) 1962 d) 1964 e) 1968

 **Resolução:**

Vamos supor que todos os anos passados até 2010, a partir do ano x do nascimento de João, tenham tido 365 dias.

Daí, o número de dias que João viveu do seu nascimento até 2010 é:

$$365(2010 - x)$$

Mas, por outro lado, levando em consideração as hipóteses da questão, ele viveu a quantidade de dias que tem 40 anos, somada à quantidade de dias de sábados, somada à quantidade de dias de domingo:

$$365 \times 40 + \frac{365(2010 - x)}{7} + \frac{365(2010 - x)}{7} = 365 \left[40 + \frac{2}{7}(2010 - x) \right]$$

Note que essa expressão decorre da suposição de que a quantidade de dias é a mesma nos $365(2010 - x)$ dias passados desde o nascimento de João.

Estabelecendo a igualdade entre as duas expressões acima, temos:

$$365(2010 - x) = 365 \left[40 + \frac{2}{7}(2010 - x) \right] \Rightarrow (2010 - x) = 40 + \frac{2}{7}(2010 - x) \Rightarrow$$

$$(1970 - x) = \frac{2}{7}(2010 - x) \Rightarrow 7(1970 - x) = 2(2010 - x) \Rightarrow$$

$$13790 - 7x = 4020 - 2x \Rightarrow 5x = 13790 - 4020 = 9770 \Rightarrow x = \frac{9770}{5} = 1954$$

Logo, João nasceu em 1954.

Resposta correta: **alternativa B.**

Questão 4

Numa papelaria, pacotes contendo 500 folhas de papel são armazenados em pilhas. Cada folha de papel tem espessura de $0,1 \text{ mm}$. Ignorando a espessura do papel utilizado para embrulhar os pacotes, podemos afirmar que a altura de uma pilha de 60 pacotes é aproximadamente igual à altura de

- a) Um gato
- b) Uma mesa comum
- c) Uma pessoa adulta
- d) Uma sala de aula
- e) Um prédio de 3 andares

 **Resolução:**

Como um pacote tem $500 \times 0,1 = 50 \text{ mm}$ de altura, então 60 pacotes empilhados têm, portanto, $60 \times 50 = 3000 \text{ mm} = 3 \text{ m}$ de altura. Veja que das alternativas, a única altura coerente com 3 m é a de uma sala de aula.

Resposta correta: **alternativa D**

Questão 5

O valor exato de $666666^2 - 333334^2$ é:

- a) 333332×10^6
- b) 333334×10^9
- c) 333332×10^8
- d) 333334×10^8
- e) 333332×10^{10}

 **Resolução:**

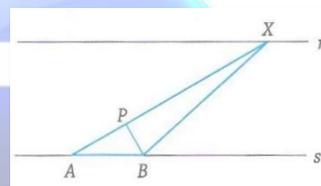
Usando produtos notáveis, observe que

$$666666^2 - 333334^2 = (666666 - 333334) \cdot (666666 + 333334) = 333332 \cdot 10^6$$

Resposta: **alternativa A.**

Questão 6

Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas a uma distância 2 uma da outra. AB é um segmento unitário contido em s , X é o ponto de r com $\overline{AX} = 5$ e P é o pé da perpendicular baixada de B sobre AX .



O comprimento de BP é:

- a) $2/3$
- b) $1/5$
- c) $2/5$
- d) $3/4$
- e) $2/3$

 **Resolução:**

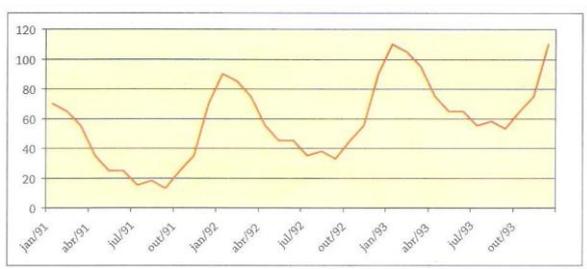
Chame $x = \overline{AP}$, $\overline{PX} = 5 - x$ e $\overline{BP} = y$.

Dos dados da questão e, como os triângulos ΔAPB e ΔBPX são retângulos, temos:

$$\text{Área}\Delta AXB = \text{Área}\Delta APB + \text{Área}\Delta BPX \Rightarrow$$

$$\frac{1 \times 2}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(5-x)y}{2} \Rightarrow 1 = \frac{xy}{2} + \frac{5y}{2} - \frac{xy}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{5}$$

Resposta correta: **alternativa C.**

Questão 7

O gráfico acima mostra a quantidade de aparelhos de ar condicionado vendidos por semana numa loja do Rio de Janeiro entre janeiro de 1991 e dezembro de 1993.

O gráfico indica que, nesse período:

- a) A venda de aparelhos de ar condicionado cresceu constantemente.
- b) A venda de aparelhos de ar condicionado permaneceu constante.
- c) A venda de aparelhos de ar condicionado foi maior em julho de 93 do que em julho de 91.
- d) A venda de aparelhos de ar condicionado foi maior em outubro de 92 do que em janeiro de 92.
- e) A venda de aparelhos de ar condicionado foi menor no verão de 93 do que no verão de 92.

Resolução:

Analisando o gráfico da questão, observamos que:

- a) A venda de aparelhos de ar condicionado não cresceu constantemente, logo a alternativa A não é a correta.
- b) A venda de aparelhos cresceu e decresceu, por isso, não permaneceu constante e a alternativa B não é a correta.
- c) Em julho/91 a loja vendeu por semana, aproximadamente 20 aparelhos de ar condicionado, enquanto, que em julho/93 foram vendidos, aproximadamente 60 destes aparelhos. Logo, venderam-se mais aparelhos neste período, correspondendo esta à afirmativa correta. Com isso, não analisaremos as demais alternativas.

Resposta correta: **alternativa C.**

Questão 8

Um grupo de jovens aluga por 342 reais uma van para um passeio, findo o qual três deles saíram sem pagar. Os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. O número de jovens era de

- a) 8
- b) 9
- c) 10
- d) 12
- e) 19

 **Resolução:**

Considere N o número de jovens que alugaram o transporte e x o valor que deveria ser pago por cada um deles. Do enunciado, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Nx = 342,00 & (I) \\ (N - 3) \cdot (x + 19) = 342,00 & (II) \end{cases}$$

De (II), temos:

$$(N - 3) \cdot (x + 19) = 342 \Rightarrow Nx + 19N - 3x - 57 = 342 \quad (III)$$

Isolando x em (I) e substituindo em (III), temos:

$$N \frac{342}{N} + 19 \cdot N - 3 \cdot \frac{342}{N} - 57 = 342 \Rightarrow 19N - \frac{1026}{N} - 57 = 0 \Rightarrow 19N - \frac{1026}{N} = 57 \Rightarrow \frac{19N^2 - 1026}{N} = 57 \Rightarrow$$

$$19N^2 - 57N - 1026 = 0 \Rightarrow N^2 - 3N - 54 = 0$$

Agora vamos encontrar o discriminante dessa equação:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54) = 9 + 216 = 225$$

Daí,

$$N = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad N = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como, em nosso caso, $N = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 0$, então esse N não serve para o nosso problema, pois

N é a quantidade de alunos, assim devemos considerar $N = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ (IV).

Substituindo os dados em (IV), temos:

$$N = \frac{-(-3) + \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 15}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

De acordo com os resultados obtidos, concluímos que o número de jovens é 9.

Resposta correta: **alternativa B.**

Questão 9

Um campeonato com 25 clubes é disputado num ano, com um único turno, pelo sistema de pontos corridos (cada clube joga uma vez com cada um dos outros). Em cada semana há sempre o mesmo número de jogos e não há jogos na semana do Natal nem na do Carnaval. O número de jogos que devem ser disputados em cada semana é:

- a) 5 b) 4 c) 8 d) 6 e) 10

 **Resolução:**

Como cada clube joga uma vez com cada um dos outros clubes, temos que o número de jogos no campeonato será:

$$\binom{25}{2} = \frac{25!}{2!(25-2)!} = \frac{25!}{2!23!} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300 \text{ jogos.}$$

Caso não deseje (ou não se lembre de) usar combinatória, basta aplicar diretamente o Princípio Fundamental da Contagem.

Além disso, como durante um ano temos 365 dias, o número de semanas num ano é:

$$\frac{365}{7} \approx 52 \text{ semanas.}$$

Sabemos que não há jogos em duas semanas do ano, logo só haverá jogos em 50 semanas do ano, assim, o número de jogos que serão disputados em cada semana será:

$$\frac{300}{50} = 6 \text{ jogos por semana.}$$

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 10

Um fazendeiro possui ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias, ele vendeu 4 vacas. Passando mais 15 dias ele compra 9 vacas. Depois desta última compra, a reserva de ração foi suficiente para alimentar as vacas por mais:

- a) 40 dias b) 36 dias c) 32 dias d) 30 dias e) 28 dias

 **Resolução:**

Observemos que as grandezas “número de vacas” e “dias de reserva de ração” são inversamente proporcionais.

Inicialmente, temos:

$$16 \text{ vacas} \rightarrow 62 \text{ dias.}$$

Passados 14 dias, existe ração para:

$$16 \text{ vacas} \rightarrow 62 - 14 = 48 \text{ dias.}$$

Após esses 14 dias, o fazendeiro vende 4 vacas, ficando com 12 vacas. Como se trata de uma proporção inversa, passamos a ter a seguinte situação:

$$12 \text{ vacas} = \frac{12}{16} \times 16 \text{ vacas} \rightarrow \frac{16}{12} \times 48 \text{ dias} = 64 \text{ dias.}$$

Assim, após 15 dias, existe ração para:

$$12 \text{ vacas} \rightarrow 64 - 15 = 49 \text{ dias.}$$

Passados mais 15 dias, o fazendeiro compra mais 9 vacas, ficando com 21 vacas. Por raciocínio análogo ao usado anteriormente, teremos:

$$21 \text{ vacas} = \frac{21}{12} \times 12 \text{ vacas} \rightarrow \frac{12}{21} \times 49 \text{ dias} = 28 \text{ dias.}$$

Portanto, as 21 vacas teriam ração suficiente para 28 dias.

Resposta correta: **alternativa E.**

Questão 11

Quando x e y assumem quaisquer valores positivos, das expressões abaixo, a única que não muda de sinal é:

- a) $x^2 + 2y - y^2$
- b) $x^2 - 5x$
- c) $x - \sqrt{x}$
- d) $x^2 - xy + y^2$
- e) $x^2 - 3xy + y^2$

 **Resolução:**

Vamos estudar o sinal de cada expressão numérica apresentada nas alternativas:

- Estudo da expressão $x^2 + 2y - y^2$:

Escolhendo $x = y = a > 0$, temos $x^2 + 2y - y^2 = 2a > 0$

Escolhendo $x = 1$ e $y = 3$, temos $x^2 + 2y - y^2 = 1 + 6 - 9 = -2$.

Logo, a alternativa A não é a correta.

- Estudo da expressão $x^2 - 5x$:

Escolhendo $0 < x < 5$, temos: $x^2 < 5x \Rightarrow x^2 - 5x < 0$. Por outro lado, escolhendo $x > 5$, temos $x^2 > 5x \Rightarrow x^2 - 5x > 0$.

Logo, a alternativa B não é a correta.

- Estudo da expressão $x - \sqrt{x}$:

Escolhendo $0 < x < 1$, temos: $x^2 < x \Rightarrow x < \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} < 0$. Semelhantemente, escolhendo $x > 1$, vemos que $x - \sqrt{x} > 0$.

Logo, a alternativa C não é a correta.

- Estudo da expressão $x^2 - xy + y^2$:

Notemos as desigualdades abaixo:

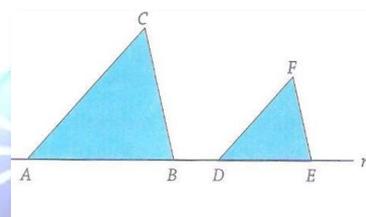
$$x^2 - xy + y^2 > x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 > 0, \forall x, y > 0$$

Com isso, concluímos que essa expressão não muda de sinal e, portanto, essa alternativa está correta.

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 12

A base AB do triângulo ABC mede 8 cm e está situada sobre a reta r . O segmento DE , também sobre r , mede 5 cm . Pelos pontos D e E traçamos paralelas a AC e BC respectivamente, as quais se cortam no ponto F formando o triângulo DEF .



A razão $\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(DEF)}$ vale:

- a) 1,25 b) 1,60 c) 3,20 d) 2,32 e) 2,56

Resolução:

Seja h a altura do triângulo ABC e h' a altura do triângulo DEF . Tem-se,

$$\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(DEF)} = \frac{8h/2}{5h'/2} = \frac{8h}{5h'}$$

Por semelhança de triângulos, a razão h/h' é a mesma que a da base dos triângulos, ou seja, $8/5$. Isto é,

$$\frac{8}{5} = \frac{h}{h'}$$

Logo,

$$\frac{\text{área}(ABC)}{\text{área}(DEF)} = \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{5} = (1,6)^2 = 2,56.$$

Resposta correta: **alternativa E.**

Questão 13

Na loja A , um aparelho custa 3800 reais mais uma taxa de manutenção mensal de 20 reais. Na loja B , o mesmo aparelho custa 2500 reais, porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. A partir de quantos meses de uso a compra na loja A se torna mais vantajosa que a da loja B ?

- a) 30 b) 72 c) 39 d) 63 e) 44

 **Resolução:**

Os valores a serem pagos pelo produto nas lojas A e B podem ser obtidos respectivamente pelas expressões $20x + 3800$ e $50x + 2500$, onde x representa a quantidade de meses de uso. Queremos que seja satisfeita a seguinte relação:

$$20x + 3800 < 50x + 2500$$

De onde vêm, $30x > 1300$, ou seja, $x > 43,3$.

Resposta correta: **alternativa E**.

Questão 14

Dividindo 6 por 7, o 100º algarismo da expansão decimal que aparece após a vírgula é:

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 7

 **Resolução:**

Ao realizarmos a divisão de 6 por 7, obtemos $0,857142857142\dots$. Verificamos que se trata de um número decimal periódico de período 857142. Como queremos o 100º algarismo dessa expansão decimal e o período do número tem 6 algarismos, basta efetuarmos a divisão 100 por 6. Com isso, teremos uma divisão não-exata:

$$100 = 16 \times 6 + 4 = 96 + 4.$$

Ou seja, de 6 em 6 algarismos, teremos 96 posições avançadas, após efetuarmos esse processo de “pular” seis algarismos (realizando 16 “pulos”). Sendo assim, ainda necessitamos de 4 algarismos para chegarmos ao centésimo. Com isto, bastaria começar uma nova contagem nos algarismos do período, e parariamos no algarismo 1.

Resposta correta: **alternativa A**.

Questão 15

Segundo informações do último censo do IBGE, a população brasileira cresceu cerca de 12%, entre os anos de 2000 a 2010. Nesse período, a população urbana passou de cerca de 81% para cerca de 84% da população total. A partir dessas informações, podemos concluir que a população não urbana no período:

- a) decresceu aproximadamente 8%
b) decresceu aproximadamente 6%
c) permaneceu aproximadamente a mesma
d) cresceu aproximadamente 9%
e) cresceu aproximadamente 12%

 Resolução

Seja x o número de habitantes do Brasil. Do enunciado, podemos construir a seguinte tabela:

	2000	2010
Total de habitantes	x	$1,12x$
População urbana	$0,81x$	$0,84 \cdot 1,12x = 0,9408x$
População rural	$0,19x$	$0,16 \cdot 1,12x = 0,1792x$

Logo, a população não urbana decresceu $(0,19x - 0,1792x) = 0,0108x$. Calculemos esse valor em porcentagem:

$$\begin{aligned} 0,19x &\rightarrow 100\% \\ 0,0108x &\rightarrow y \end{aligned}$$

Assim, $y = 5,68\% \Rightarrow y \cong 6\%$.

Resposta correta: **alternativa B.**

Questão 16

Uma sequência de números naturais é definida por $a_{n+1} = 2a_n - 3$, para todo $n \geq 0$ e $a_0 = 5$. O valor de a_9 é:

- a) 612 b) 825 c) 1027 d) 1286 e) 2048

 Resolução:

Encontremos o valor de a_9 :

$$a_1 = 2.a_0 - 3 = 2.5 - 3 = 7, \text{ logo } a_1 = 5 + 2$$

$$a_2 = 2.a_1 - 3 = 2.7 - 3 = 11, \text{ logo } a_2 = 5 + 2 + 2^2$$

$$a_3 = 2.a_2 - 3 = 2.11 - 3 = 19, \text{ logo } a_3 = 5 + 2 + 2^2 + 2^3$$

E daí, podemos inferir que o termo geral da sequência é:

$$a_n = 5 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

de onde resulta

$$a_9 = 5 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 1027.$$

Resposta correta: **alternativa C.**

OBS: A validação do termo geral da sequência pode ser provada pelo Princípio de Indução Finita.

Questão 17

Se a expressão $y = ax^2 + bx + 4$, com $x \in \mathbb{R}$, assume um máximo $y = 12$ no ponto $x = 2$, então o módulo de a é igual a:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

 **Resolução:**

Sabemos que a abscissa x onde a expressão assume um máximo é dado por:

$$2 = x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow b = -4a.$$

Por outro lado, y é dado por:

$$12 = y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-16a^2 + 16a}{4a} = -4a + 4 \Rightarrow$$

$$12 = -4a + 4 \Rightarrow$$

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

Resposta correta: **alternativa B.**

Questão 18

A soma das raízes da equação $\sqrt{3x - 2} = \sqrt{x} + 2$ é igual a:

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

 **Resolução:**

Observe:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - 2} = \sqrt{x} + 2 &\Rightarrow 3x - 2 = x + 4\sqrt{x} + 4 \Rightarrow \\ 2x - 6 &= 4\sqrt{x} \Rightarrow x - 3 = 2\sqrt{x} \Rightarrow \\ x^2 - 6x + 9 &= 4x \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0. \end{aligned}$$

Temos, portanto, $\Delta = 100 - 36 = 64$. Logo, $r_1 = 9$ e $r_2 = 1$.

Contudo, $\sqrt{3 - 2} \neq \sqrt{1} + 2$. Assim 1 não é raiz da equação irracional.

A resposta correta é 9 pelo fato de ser a única raiz da equação irracional.

Resposta correta: **alternativa D**

Questão 19

Maria foi trabalhar e deixou dinheiro para seus três filhos, com este bilhete: “*Dividam igualmente o dinheiro. Beijos*”. O primeiro filho chegou, pegou a terça parte do dinheiro e saiu. O segundo chegou e não viu ninguém. Pensando que era o primeiro, pegou a terça parte do dinheiro que tinha e saiu. O terceiro encontrou 4 notas de 5 reais. Achou que era o último, pegou tudo e saiu. Quanto em dinheiro a mãe deixou?

- a) 25 reais b) 35 reais c) 45 reais d) 48 reais e) 55 reais

 **Resolução:**

Vamos denotar por x o valor deixado por Maria. Temos a seguinte situação:

- Quantia que o primeiro filho pegou: $\frac{x}{3}$
- Quantia que o segundo filho pegou: $\frac{1}{3}\left(x - \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2x}{9}$
- Quantia que o terceiro filho pegou: 20 reais.

Com essas observações, segue-se a igualdade:

$$x = \frac{x}{3} + \frac{2x}{9} + 20 \Rightarrow$$

$$x - 20 = \frac{x}{3} + \frac{2x}{9} \Rightarrow$$

$$9(x - 20) = 3x + 2x = 5x \Rightarrow$$

$$9x - 180 = 5x \Rightarrow$$

$$x = \frac{180}{4} = 45.$$

Com isso, concluímos que Maria havia deixado 45 reais para seus filhos.

Resposta correta: **alternativa C.**

Questão 20

Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e escrevem-se os números formados em ordem crescente. O número que ocupa a 50ª posição é:

- a) 25413 b) 25431 c) 31245 d) 31254 e) 31425

 **Resolução:**

Observe que em ordem crescente, a permutação na primeira posição é 12345. Então, fixando o algarismo 1, pelo princípio fundamental da contagem, há $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades nas permutações do tipo 1 _ _ _ (isto é, as primeiras 24 permutações em ordem crescente tem o algarismo 1 na dezena de milhar).

Seguindo o raciocínio, tem-se mais 24 permutações cujo algarismo na dezena de milhar é 2, esgotando assim as primeiras 48 permutações em ordem crescente. Portanto, como a 49ª permutação é 31245 tem-se que a 50ª permutação é 31254.

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 21

O campo magnético do sol periodicamente se torna muito mais intenso, aparecem as manchas solares e ocorrem as tempestades que são enormes explosões. Isso dura alguns meses e depois desaparece. Tal fenômeno foi observado pela última vez no ano de 1755 e se repete com regularidade a cada 11 anos.

A última vez que esse fato ocorreu foi em

- a) 2004 b) 2005 c) 2006 d) 2007 e) 2008

 **Resolução:**

O fenômeno foi observado pela última vez há $2011 - 1755 = 256$ anos. Se ele se repete com regularidade a cada 11 anos, para saber a última vez em que o fenômeno ocorreu, basta subtrair de 2011 o resto da divisão de 256 por 11. Efetuando os cálculos temos:

$$256 = 11 \cdot 23 + 3.$$

E daí, como $2011 - 3 = 2008$, o fenômeno ocorreu pela última vez em 2008.

Resposta correta: **alternativa E.**

Questão 22

Um grupo de crianças brinca em torno de várias cadeiras. Se duas crianças sentam em cada cadeira, uma criança fica de pé. Se três crianças sentam em cada cadeira, uma cadeira fica vazia. O número de crianças é:

- a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

 **Resolução:**

Denotemos por C o número de crianças e por K o número de cadeiras. Observe que a primeira sentença nos leva a deduzir a seguinte equação:

$$C = 2K + 1$$

A segunda sentença nos leva a:

$$K = \frac{C}{3} + 1$$

Resolvendo o sistema, descobriremos o número de crianças.

$$\begin{cases} C = 2K + 1 & (1) \\ K = \frac{C}{3} + 1 & (2) \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda obtemos:

$$K = \frac{(2K+1)}{3} + 1 \Rightarrow 3K = 2K + 1 + 3 \Rightarrow K = 4.$$

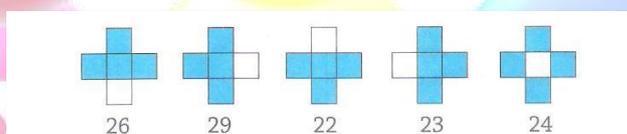
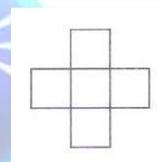
Logo, o número de crianças é igual a nove.

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 23

A figura ao lado é formada por cinco pequenos quadrados e, dentro de cada quadrado, esconde-se um número inteiro.

O número que aparece abaixo de cada um dos desenhos a seguir é a soma dos números que estão escondidos nos quadrados pintados.

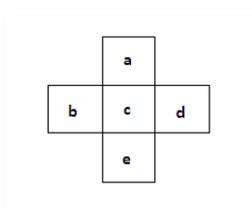


O número do quadrinho central é:

- a) 2 b) 5 c) 7 d) 9 e) 13

Resolução:

Seja a figura:



Do enunciado, formamos o sistema:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 26 & (I) \\ a + b + c + e &= 29 & (II) \\ b + c + d + e &= 22 & (III) \\ a + c + d + e &= 23 & (IV) \\ a + b + d + e &= 24 & (V) \end{aligned}$$

Fazendo,

$$(V) - (IV): b - c = 1 \Rightarrow b = c + 1.$$

$$(V) - (III): a - c = 2 \Rightarrow a = c + 2.$$

$$(V) - (II): d - c = -5 \Rightarrow d = c - 5$$

Substituindo os resultados acima em (I), obtemos:

$$c + 2 + c + 1 + c + c - 5 = 26 \Rightarrow 4c = 28 \Rightarrow c = 7.$$

Resposta correta: **alternativa C.**

Questão 24 ANULADA!

Considere que $10^{0,477}$. O valor de x tal que $10^x = 9000$ é:

- a) 3,556
- b) 3,628
- c) 3,746
- d) 3,882
- e) 3,954

Questão 25

Numa cidade existe uma pessoa X que sempre mente terças, quintas e sábados e é completamente sincera o resto dos dias da semana. Felipe chega um certo dia na cidade e mantém o seguinte diálogo com a pessoa X:

- Felipe: *Que dia é hoje?*
- X: *Sábado.*
- Felipe: *Que dia será amanhã?*
- X: *Quarta-feira.*

Em que dia da semana foi mantido este diálogo?

- a) Sábado.
- b) Quinta-feira.
- c) Segunda-feira.
- d) Terça-feira.
- e) Sexta-feira.

Resolução:

Segundo a primeira resposta, o dia que o diálogo foi mantido não pode ser sábado, pois X mente nesse dia. Além disso, o dia do diálogo não pode ser segunda, quarta, sexta ou domingo, já que nesses dias a pessoa X fala a verdade.

De acordo com a segunda resposta, o dia do diálogo não pode ser terça, uma vez que nesse dia a pessoa X mente.

Logo, por exclusão, o dia que foi mantido o diálogo é quinta.

Resposta correta: **alternativa B.**

Questão 26

O número 2568 possui dígitos em ordem crescente. Os números 5667 e 3769 não possuem dígitos em ordem crescente. Quantos são os números naturais entre 1000 e 9999 que possuem seus dígitos em ordem crescente?

- a) 126 b) 144 c) 186 d) 210 e) 252

Resolução

Observe primeiramente que dados 4 dígitos que vão compor nosso número, há somente uma forma de dispor esses dígitos de tal modo que eles fiquem em ordem crescente.

- Fixando o número 1 como primeiro dígito temos 8 possibilidades para escolhermos os outros 3 dígitos que irão compor nosso número, ou seja, temos $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$ números que possuem dígitos em ordem crescente entre 1000 e 1999.
- Fixando o número 2 como primeiro dígito temos 7 possibilidades para escolhermos os outros 3 dígitos que irão compor nosso número, ou seja, temos $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ números que possuem dígitos em ordem crescente entre 2000 e 2999.
- Fixando o número 3 como primeiro dígito temos 6 possibilidades para escolhermos os outros 3 dígitos que irão compor nosso número, ou seja, temos $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ números que possuem dígitos em ordem crescente entre 3000 e 3999.
- Fixando o número 4 como primeiro dígito temos 5 possibilidades para escolhermos os outros 3 dígitos que irão compor nosso número, ou seja, temos $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ números que possuem dígitos em ordem crescente entre 4000 e 4999.
- Fixando o número 5 como primeiro dígito temos 4 possibilidades para escolhermos os outros 3 dígitos que irão compor nosso número, ou seja, temos $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$ números que possuem dígitos em ordem crescente entre 5000 e 5999.
- Fixando o número 6 como primeiro dígito temos 3 possibilidades para escolhermos os outros 3 dígitos que irão compor nosso número, ou seja, temos $\binom{3}{3} = 1$ número que possui dígitos em ordem crescente, esse número é 6789 e é o último número possível.

Logo, somando todas as possibilidades, o número n de números naturais entre 1000 e 9999 que possuem seus dígitos em ordem crescente é:

$$n = 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 126 \text{ números}$$

OBS: Caso não deseje (ou não se lembre de) usar combinatória, basta aplicar o Princípio Fundamental da Contagem.

Resposta: **alternativa A.**

Questão 27

Se espremermos um círculo de raio 10 cm entre duas retas paralelas que distam entre si 10 cm , obteremos uma figura de área menor, mas de mesmo perímetro que o círculo original.



Se as partes curvas desta figura obtida são semicircunferências, a razão da área da figura espremida pela área do círculo inicial é

- a) $3/4$ b) $4/3$ c) $2/3$ d) $3/2$ e) $\pi/4$

Resolução:

Primeiramente, vamos calcular a área A_c e o perímetro P_c do círculo inicial.

$$P_c = 2\pi r = 20\pi\text{ cm.}$$

$$A_c = \pi r^2 = 100\pi\text{ cm}^2.$$

Observe que a nova figura possui mesmo perímetro do que o círculo inicial. Além disso, as duas semicircunferências juntas nos dão uma circunferência de raio igual a 5 cm (já que as retas distam entre si 10 cm). Seja x a medida de cada segmento que é a interseção entre a figura e as retas paralelas, daí o perímetro do círculo achatado é:

$$2x + 10\pi = P_c = 20\pi \Rightarrow x = 5\pi.$$

A área do círculo achatado A_f é a soma da área do retângulo com a área dos semicírculos:

$$A_f = 5\pi \times 10 + \pi \times 5^2 = 75\pi\text{ cm}^2.$$

A razão da área da figura espremida pela área do círculo inicial é, portanto,

$$\frac{A_f}{A_c} = \frac{75\pi\text{ cm}^2}{100\pi\text{ cm}^2} = 3/4.$$

Resposta correta: **alternativa A.**

Questão 28

Em uma festa há 13 casais. Cada homem cumprimenta com um aperto de mão os outros convidados, exceto sua própria esposa. As mulheres recebem apertos de mão, mas não procuram ninguém para cumprimentar.

Quantos apertos de mão são dados pelos 26 participantes?

- a) 234 b) 235 c) 236 d) 237 e) 238

 **Resolução**

Primeiramente, vamos contar o número de apertos de mão de homem para mulher. Como são 13 homens e cada um deles cumprimenta com um aperto de mão cada mulher (exceto a própria esposa), vemos que o número de apertos de mão entre homem e mulher é $13 \times 12 = 156$.

Agora vamos contar o número de apertos de mão entre homens. Para tanto, fixemos um dos homens e o chamemos *homem 1*. Sabemos que ele apertará a mão dos outros 12 homens. Fixemos, agora, outro homem, chamado de *homem 2*. Notemos que ele só apertará a mão de 11 homens, uma vez que já foi cumprimentado pelo *homem 1* no passo anterior. Da mesma forma, fixado mais um homem, digamos *homem 3*, ele já terá sido cumprimentado pelo *homem 1* e pelo *homem 2*. Assim, terá que dar mais 10 apertos de mão. Aplicando esse raciocínio para os demais homens, decorre que a quantidade de apertos de mão entre homens é

$$12+11+10+\dots+3+2+1=78.$$

Portanto, o total de apertos de mão é $156 + 78 = 234$.

Resposta correta: **alternativa A**.

Questão 29

O máximo divisor comum entre dois números naturais é 16 e o mínimo múltiplo comum desses mesmos números é 576.

Podemos garantir que:

- a) Os dois números são maiores que 50
- b) O produto dos dois números é maior que 8000
- c) Os dois números são múltiplos de 32
- d) Os dois números são divisores de 96
- e) Um dos números é múltiplo do outro

 **Resolução:**

Sejam a e b tais números. Sabemos que

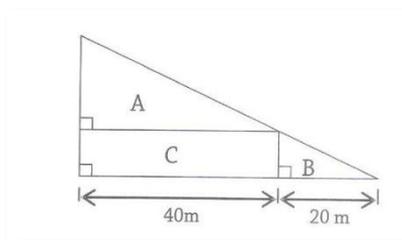
$$mmc(a, b) \times mdc(a, b) = ab$$

Logo, $576 \times 16 = 9216 = ab$, donde podemos concluir que o produto de ab é maior do que 8000.

Resposta correta: **alternativa B**.

Questão 30

Um terreno triangular foi dividido em três terrenos menores conforme a figura.



Então:

- a) A área do terreno B é a metade da área do terreno A
- b) A área do terreno C é maior do que a área do terreno A
- c) A área do terreno B é $1/3$ da área do terreno A
- d) A área do terreno A é igual a área do terreno C
- e) A área do terreno B é maior do que a área do terreno A

Resolução:

Observe que os triângulos que representam os terrenos A e B são semelhantes, pois os seus ângulos possuem a mesma medida. Seja h a altura do triângulo do terreno B , e h' , a do terreno A . Daí, por semelhança de triângulos, podemos concluir que $\frac{h'}{h} = \frac{40}{20}$, ou seja, $h' = 2h$, de onde vem que a área do terreno A é igual a área do terreno C , pois,

$$\text{Área } A = \frac{40h'}{2} = 40h = \text{Área } C.$$

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 31

Os gráficos das funções reais $f(x) = x^2 - b$ e $g(x) = x - \frac{5}{4}$ possuem um único ponto em comum. O valor de b é:

- a) 0
- b) 4
- c) -1
- d) $-\frac{5}{4}$
- e) 1

Resolução:

Faça $f(x) = g(x)$. Logo,

$$x^2 - b = x - \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 - x + \left(-b + \frac{5}{4}\right) = 0.$$

De agora em diante calcularemos o discriminante Δ da equação acima. Observando que este deve assumir valor zero, pois, se for maior que zero, resultará em duas raízes reais e dois valores de x comum a f e g . Não pode ocorrer, também, que $\Delta < 0$, pois não seria possível existir um valor comum a f e g .

Portanto,

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)\left(-b + \frac{5}{4}\right)$$

$$\Delta = 1 + 4b - 5 \Rightarrow \Delta = 4b - 4$$

Como $\Delta = 0$, temos:

$$4b - 4 = 0 \Rightarrow b = 1$$

Resposta certa: **alternativa E.**

Questão 32

Quando Joãozinho tirou 9,8 em uma prova, sua média subiu 0,1. Na prova seguinte, ele tirou 7,0 e sua média caiu 0,2.

Quantas provas ele realizou, incluindo estas duas últimas?

- a) 10 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9

 **Resolução:**

Sejam M a média, S a soma inicial das notas e n o número inicial de provas, temos:

$$M = \frac{S}{n} \quad (\text{I})$$

Do enunciado, vem:

$$M + 0,1 = \frac{S + 9,8}{n + 1} \quad (\text{II})$$

$$(M + 0,1) - 0,2 = M - 0,1 = \frac{(S + 9,8) + 7,0}{(n + 1) + 1} \quad (\text{III})$$

Substituindo,

$$(I) \text{ em } (II): M + 0,1 = \frac{S + 9,8}{n + 1} \Rightarrow S(n + 1) = Sn + 9,8 - 0,1n(n + 1) \Rightarrow$$

$$Sn + S = Sn + 9,8n - 0,1n^2 - 0,1n \Rightarrow$$

$$S = 9,7n - 0,1n^2. \quad (\text{IV})$$

$$(I) \text{ em } (III): M - 0,1 = \frac{(S + 9,8) + 7,0}{(n + 1) + 1} \Rightarrow S(n + 2) = (S + 9,8)n + 0,1n(n + 2) \Rightarrow$$

$$Sn + 2S = Sn + 16,8n + 0,1n^2 + 0,2n \Rightarrow$$

$$2S = 17,0n + 0,1n^2. \quad (\text{V})$$

Resolvendo o sistema formado por (IV) e (V), temos:

$$3S = 26,7n \Rightarrow S = 8,9n.$$

Substituindo $S = 8,9n$ em (IV), obtemos:

$$8,9n = 9,7n - 0,1n^2 \Rightarrow 0,1n(n + 8) = 0 \Rightarrow n = 8$$

Assim, o número total de provas é $(n + 2) = 10$.

Resposta certa: **alternativa A.**

Questão 33

Os números 5, 356 e 590 são termos de uma progressão aritmética de números inteiros positivos, de razão máxima. Assinale o termo seguinte ao termo 590:

- a) 599 b) 603 c) 717 d) 707 e) 612

 **Resolução:**

Note que esses três números não são termos consecutivos de uma P.A.

Suponha que exista um único número x entre 5 e 356 tal que 5, x e 356 seja parte de uma progressão aritmética. Daí,

$$x - 5 = 356 - x \Rightarrow 2x = 361 \Rightarrow x = \frac{361}{2}.$$

Observe que esse valor não serve, pois x não é um número inteiro. Logo existem mais de um número entre 5 e 356.

Agora suponha que exista um único número y entre 356 e 590 tal que 356, y e 590 façam parte de uma progressão aritmética. Se isso ocorresse teríamos:

$$y - 356 = 590 - y \Rightarrow 2y = 590 + 356 = 946 \Rightarrow y = \frac{946}{2} = 473.$$

Note que 356, 473 e 590 são termos da Progressão Aritmética, com razão

$$r = 473 - 356 = 117 = 590 - 473.$$

Verifiquemos se 5 faz parte também dessa P.A:

Como

$$5, \quad 122 = 117 + 5, \quad 239 = 122 + 117, \quad 356 = 239 + 117, \quad 473 = 356 + 117, \\ 590 = 473 + 117..$$

Concluimos que os três termos 5, 356 e 590 fazem parte da P.A. anterior.

Então o próximo termo após 590 é $590 + 117 = 707$.

O número $r = 117$ é a razão máxima. De fato, suponha que exista uma razão maior $R > 117$. Dessa forma, existe um número natural n tal que $356 = 5 + nR$ e $nR = 351 = 3 \cdot 117$. Donde $R = 351$, mas dessa forma, os números 356 e 590 não estariam na P.A. Portanto, 117 é a maior razão.

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 34

Eduardo pensou em dois números naturais a e b . Sabe-se que apenas uma das cinco afirmações abaixo é verdadeira. Assinale-a.

- a) ab é um número par
- b) $a + b = 5$ e $b - a = 7$
- c) $a + b = 4$ e $a = 3b$
- d) $|a - b| \leq 2$
- e) Pelo menos um dos dois números a ou b é par

 **Resolução:**

Suponha que a alternativa A seja a verdadeira e note que, se isso acontecesse, a alternativa E também seria, mas é afirmado no enunciado do texto APENAS UMA das afirmações é verdadeira, logo nem a A e nem a E são alternativas corretas.

Se B fosse verdadeira teríamos:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ b - a = 7 \end{cases} \Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = -1$$

Mas a e b são números naturais, deste modo a não pode ser negativo, logo a alternativa B é falsa.

Suponha agora que C seja verdadeira, daí teríamos:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a = 3b \end{cases} \Rightarrow 4b = 4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$$

Note que $|a - b| = |3 - 1| = 2$, assim se C for verdadeira a alternativa D também será, o que contraria o enunciado da questão, logo a alternativa C também é falsa.

Resposta correta: **alternativa D.**

Questão 35

Os jogadores A e B têm, cada um, três cartas na mão, e sabem as cartas do oponente. Jogarão em 3 rodadas depositando uma carta na mesa em cada rodada, um após o outro. O vencedor da rodada será aquele que jogar a carta mais alta. O jogador A será o primeiro a jogar a carta na primeira rodada, e nas outras duas rodadas o primeiro a jogar será o vencedor da rodada anterior. Vence o jogo quem ganhar mais rodadas. Suponha que A tenha as cartas com números 3, 6 e 10, e que B tenha as cartas 2, 7 e 9. São feitas as seguintes afirmativas:

- I. Entre todos os possíveis pares formados por uma carta de A e uma carta de B , há mais pares em que A ganha.
- II. A melhor estratégia para A é sempre jogar a carta mais alta.
- III. Se A jogar 3 ou 6 na primeira rodada, poderá ganhar com qualquer resposta de B .
- Assinale a alternativa correta, com respeito às afirmações I, II e III (nesta ordem):

- a) FALSA, VERDADEIRA, FALSA
b) VERDADEIRA, VERDADEIRA, FALSA
c) VERDADEIRA, FALSA, VERDADEIRA
d) FALSA, FALSA, VERDADEIRA
e) VERDADEIRA, FALSA, FALSA

 **Resolução:**

Um par de cartas será uma rodada.

Como o jogador A joga a primeira carta da primeira rodada, analisemos os possíveis pares formados pelas cartas dos jogadores A e B na primeira rodada:

$(3, 2), (3, 7), (3, 9), (6, 2), (6, 7), (6, 9), (10, 2), (10, 7), (10, 9)$.

Observe que, entre os possíveis casos, A ganha em cinco dos nove, a saber:

$(3, 2), (6, 2), (10, 2), (10, 7), (10, 9)$.

Logo, I está correta, eliminando, assim, as alternativas A e D.

Para provar que II é falsa, basta conseguir um contra-exemplo. Considere a seguinte sequência de jogadas:

$(10, 2), (6, 9), (7, 3)$

O jogador A começa a jogar com sua carta de valor mais alto, no entanto, ele perde o jogo, pois na segunda rodada a carta de maior valor que ele pode jogar é 6 e daí o jogador B pode ganhar as duas rodadas subsequentes.

Segue que II é falsa e, portanto, a alternativa B também é falsa. Restam as alternativas C e E.

Por fim, nos voltemos para a afirmativa III. Por construção de possibilidades de sequências de jogadas, chegamos às seguintes rodadas. Lembre-se: quem ganha é aquele que joga na próxima rodada.

$(3, 7), (9, 10), (6, 2) \rightarrow A$ ganhou mais rodadas
 $(3, 9), (7, 10), (6, 2) \rightarrow A$ ganhou mais rodadas
 $(3, 2), (10, 9), (6, 7) \rightarrow A$ ganhou mais rodadas
 $(3, 2), (10, 7), (6, 9) \rightarrow A$ ganhou mais rodadas
 $(6, 7), (9, 10), (3, 2) \rightarrow A$ ganhou mais rodadas
 $(6, 9), (7, 10), (3, 2) \rightarrow A$ ganhou mais rodadas
...etc.

Dessa forma, se analisa os outros possíveis casos.

Logo, III é verdadeira.

Resposta correta: **alternativa C.**

