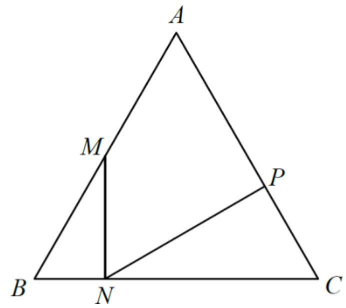
Grupo PET-Matemática UFCG



Resolução do Exame de acesso ao PROFMAT 2012

www.dme.ufcg.edu.br/pet/

Grupo PET Matemática - UFCG: Alan, André, Arthur, Felipe, Geovany, Juarez, Juliérika, Matheus, Michell, Paulo, Sandra, Thiago.

2012

Resolução do Exame de acesso ao PROFMAT 2012

CAMPINA GRANDE, 05/06/2012

APRESENTAÇÃO

É com satisfação que o Grupo PET-Matemática-UFCG disponibiliza para nossos colegas de todo o país a resolução das questões objetivas do Exame Nacional de Admissão do PROFMAT, ao qual se submeteram milhares de professores.

Sob nossa orientação e supervisão, nossos bolsistas PET resolveram a prova e redigiram as soluções da maneira mais natural, sem procurar soluções geniais ou mirabolantes. Os parabenizo por aceitarem mais esse desafio, realizado em um curto intervalo de tempo.

Ficamos à disposição e agradecemos se nos mandarem dúvidas, nos apontarem erros e enviarem sugestões. Esperamos estar colaborando com a melhoria do ensino em nosso país.

Abraço fraterno,

Daniel Cordeiro

Tutor PET-Matemática UFCG

Contato: daniel@dme.ufcg.edu.br

Bibliografia

Manual de Redação Matemática: Com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação.

www.fabricadeensino.com.br

Sumário

QUESTÃO 1

Qual dos números abaixo é o mais próximo de 0,7?

A) $1/2$
B) $2/3$
C) $3/4$
D) $4/5$
E) 5/7

Uma solução [Alan]

Para determinarmos qual das frações abaixo é a mais próxima de $0{,}7 = 7/10$, vamos escrever todas essas frações com o mesmo denominador. Para isso, observamos que mmc$(2, 3, 4, 5{,}7) = 420$. Agora note que:

$$\frac{7}{10} = \frac{42}{42} \times \frac{7}{10} = \frac{294}{420}; \quad \frac{1}{2} = \frac{210}{210} \times \frac{1}{2} = \frac{210}{420}; \quad \frac{2}{3} = \frac{140}{140} \times \frac{2}{3} = \frac{280}{420};$$

$$\frac{3}{4} = \frac{105}{105} \times \frac{3}{4} = \frac{315}{420}; \quad \frac{4}{5} = \frac{84}{84} \times \frac{4}{5} = \frac{336}{420}; \quad \frac{5}{7} = \frac{60}{60} \times \frac{5}{7} = \frac{300}{420}.$$

Para determinar qual fração está mais próxima de $0{,}7$, basta observar qual numerador é mais próximo de 294.

Alternativa correta: letra E.

QUESTÃO 2

Considere três números, a, b e c. A média aritmética entre a e b é 17 e a média aritmética entre a, b e c é 15. O valor de c é:

A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 15

Uma solução [André]

Sabemos que $(a+b)/2 = 17$ e $(a+b+c)/3 = 15$. Daí, $(a+b)/2 - 2 = (a+b+c)/3$. Assim,

$$c = 3 \times \left(\frac{a+b}{2} - 2\right) - (a+b) = 3\frac{a+b}{2} - 6 - 2\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Como $\left(\frac{a+b}{2}\right) = 17$, tem-se,

$$c = (3 \times 17) - 6 - (2 \times 17) = 17(3-2) - 6 = 17 - 6 = 11.$$

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 3

O número total de divisores positivos de $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ é igual a:

A) 15
B) 270
C) 320
D) 1024
E) $10!$

Uma solução [Arthur]

Observe que $10!$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Logo, cada divisor de $10!$ será da forma $2^m \cdot 3^n \cdot 5^p \cdot 7^q$,onde m, n, p, q são números naturais tais que $0 \leq m \leq 8\,; 0 \leq n \leq 4\,; 0 \leq p \leq 2\; e\; 0 \leq q \leq 1$.

Portanto, pelo princípio multiplicativo temos que a quantidade de divisores de $10!$ é

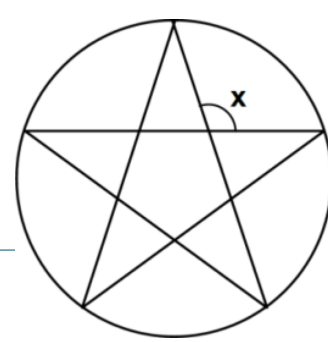
$$9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270.$$

Usando este método não estamos contando nenhum divisor a mais, pois $10!$ está decomposto em fatores primos. Outro fato é que os divisores 1 e $10!$ também foram contados já que podemos escrever $1 = 2^0.3^0.5^0.7^0$ e $10! = 2^8.3^4.5^2.7$.

Alternativa correta: letra B.

QUESTÃO 4

A figura mostra um pentágono regular estrelado inscrito em uma circunferência. O ângulo x mede:



A) $108°$
B) $120°$

C) $136°$
D) $144°$
E) $150°$

Uma solução [Felipe]

Como o pentágono é regular, seus ângulos internos são iguais. Sabemos que a soma S_n dos ângulos internos de um polígono convexo vale $(n-2)\cdot 180°$, onde n é o número de lados do polígono. Assim, no caso do pentágono,

$$S_5 = (5-2)\cdot 180° = 540°.$$

Como o ângulo x é oposto pelo vértice a um dos ângulos internos do pentágono, eles são iguais. Logo, $5x = 540°$, donde obtemos $x = 108°$.

Alternativa correta: letra A.

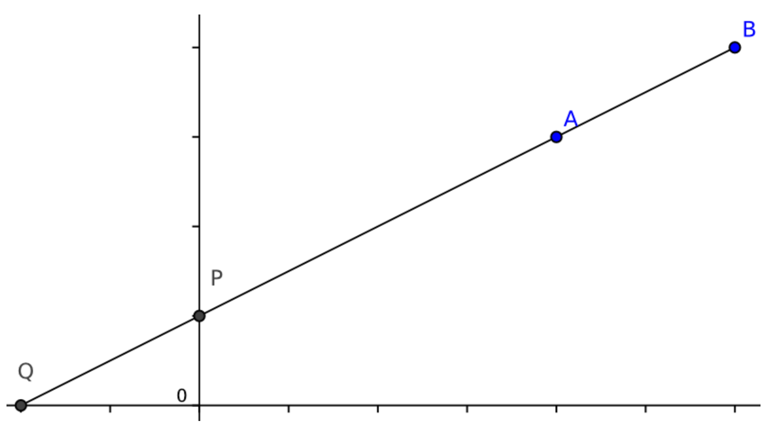
QUESTÃO 5

No plano cartesiano, a reta que passa pelos pontos $A = (4, 3)$ e $B = (6, 4)$ corta os eixos nos pontos P e Q. O comprimento do segmento PQ é:

A) $\mathbf{1}$
B) $\sqrt{\mathbf{2}}$
C) $\sqrt{\mathbf{3}}$
D) $\sqrt{\mathbf{5}}$
E) $\mathbf{2}$

Uma solução [Geovany]

Supondo que os pontos P e Q pertencem aos eixos y e x, respectivamente, suas coordenadas são da forma $P(0, Y)$ e $Q(X, 0)$.



Precisamos determinar os valores de X e Y. Para isso, encontraremos a função afim f cujo gráfico passa por A e B. Ou seja, queremos $f(x) = ax + b$ tal que $f(4) = 3$ e $f(6) = 4$. Assim,

$$f(4) = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 3$$
$$f(6) = 6a + b \Rightarrow 6a + b = 4.$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ 6a + b = 4 \end{cases}$, obtemos $a = \frac{1}{2}$ e $b = 1$. Logo,

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Daí,

$$f(0) = Y \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = Y \Rightarrow Y = 1 \; ; \; P(0,1)$$

e

$$f(X) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot X + 1 = 0 \Rightarrow X = -2 \; ; \; Q(-2,0).$$

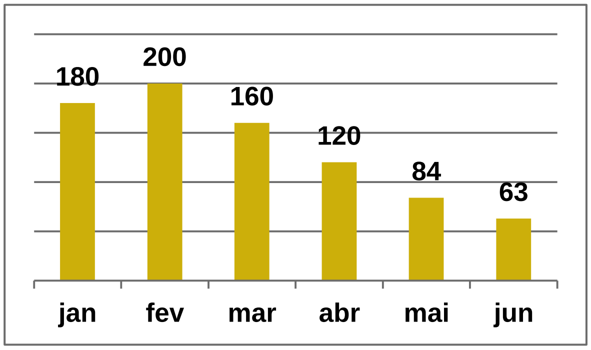
Como queremos saber o comprimento do seguimento PQ, usaremos a fórmula da distância entre dois pontos:

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt[2]{(Px - Qx)^2 + (Py - Qy)^2} \\ &= \sqrt[2]{(0-(-2))^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt[2]{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt[2]{5}. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento do segmento PQ é igual à $\sqrt[2]{5}$.

Alternativa correta: letra D.

QUESTÃO 6



O gráfico ao lado mostra o número de atendimentos de pacientes com uma certa doença num ambulatório no primeiro semestre de 2010. Quando houve o maior decréscimo percentual no número de atendimentos?

A) Entre janeiro e fevereiro.
B) Entre fevereiro e março.
C) Entre março e abril.
D) Entre abril e maio.
E) Entre maio e junho.

Uma solução [Juarez]

Analisemos todos dos dados entre cada mês:

- Entre janeiro e fevereiro, claramente vemos que o número de atendimentos no ambulatório aumentou, logo não houve decréscimo percentual.

- Entre fevereiro e março, houve uma queda de 40 atendimentos, em que os 200 atendimentos correspondem a 100% dos mesmos. Daí,

$$\begin{array}{ccc} 200\; atendimentos & - & 100\% \\ 40\; atendimentos & - & x, \end{array}$$

ou seja, houve um decréscimo de 20% no número de atendimentos.

- Entre março e abril, também foi registrada uma queda de 40 atendimentos, sendo os 160 atendimentos equivalentes a 100%. Assim,

$$\begin{array}{ccc} 160\ atendimentos & - & 100\% \\ 40\ atendimentos & - & x. \end{array}$$

Logo, entre março e abril, houve um decréscimo percentual de 25% no número de atendimentos.

Entre abril e maio, houve uma queda de 36 atendimentos, sendo os 120 atendimentos correspondentes a 100% destes. Tem-se,

$$\begin{array}{ccc} 120\ atendimentos & - & 100\% \\ 36\ atendimentos & - & x. \end{array}$$

Assim, houve um decréscimo percentual de 30% no número de atendimentos.

- Entre maio e junho, foi registrada uma queda de 21 atendimentos em que os 84 atendimentos correspondem a 100% dos mesmos. Daí,

$$\begin{array}{ccc} 84\ atendimentos & - & 100\% \\ 21\ atendimentos & - & x, \end{array}$$

resultando um decréscimo percentual de 25% no número de atendimentos. Portanto, podemos concluir que o maior decréscimo percentual no número de atendimentos foi de 30%, registrado entre os meses de abril e maio.

Alternativa correta: letra D.

QUESTÃO 7

Meninas formaram uma roda. Maria é a quinta garota à esquerda de Denise e é a sexta garota à direita de Denise. Quantas meninas estão na roda?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 17

Uma solução [Juliérika]

Como Maria é a quinta menina à esquerda de Denise e é a sexta à direita de Denise, entre elas há 4 meninas à esquerda e 5 meninas à direita de Denise. Incluindo nesse contagem Maria e Denise, temos $4 + 5 + 1 + 1 = 11$.

Alternativa correta: letra B.

QUESTÃO 8

Se a medida do diâmetro de um círculo aumenta em 100%, então a medida de sua área aumenta em:

A) 300%
B) 100%
C) 200%
D) 400%
E) 314%

Uma solução [Matheus]

Aumentar o diâmetro d de um círculo em 100% é o mesmo que duplicá-lo. Assim, o diâmetro do novo círculo é $2d$ e consequentemente sua área é $\pi\left(\frac{2d}{2}\right)^2 = \pi d^2$, enquanto que a área do círculo inicial é $\pi d^2/4$. Seja $x\%$ o aumento da área do círculo. Temos,

$$\pi d^2 = \frac{\pi d^2}{4} + \frac{x}{100} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow x = 300.$$

Logo, o aumento foi de 300%.

Alternativa correta: letra A.

QUESTÃO 9

Seu João precisa pesar uma pera em uma balança de dois pratos. Ele possui 5 pesos distintos, de 1g, 3g, 9g, 27g e 81g. Seu João, equilibrando a pera com os pesos, descobriu que a pera pesa 61g. Quais pesos estavam no mesmo prato que a pera?

A) $1, 9$ e 27
B) 3 e 27
C) 9 e 27
D) 1 e 9
E) 3 e 9

Uma solução [Michell]

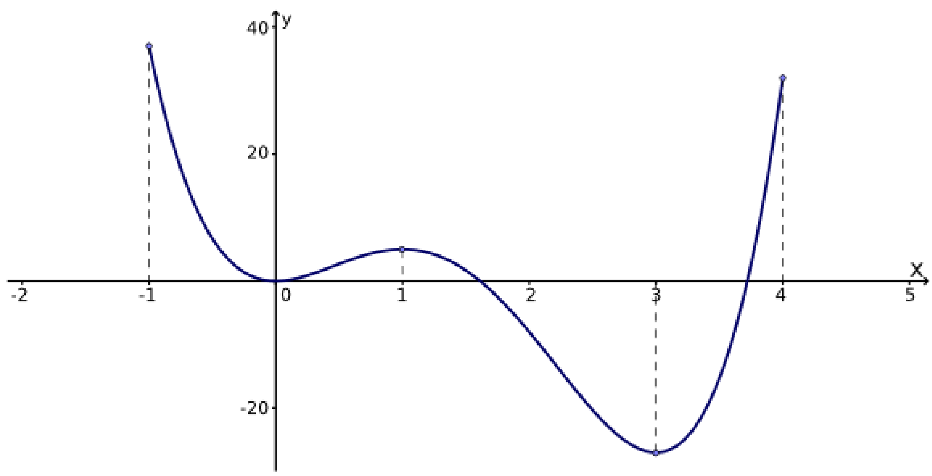
Denotemos por B_1 e B_2 os pratos da balança. Sabendo que o peso da pera é $61g$, digamos que ela estivesse em B_1. Nosso objetivo é distribuir os pesos adicionais de forma que os pratos da balança estejam em equilíbrio. Assim, a quantidade adicional de $81g$ não pode ser posta em B_1, pois caso contrário a soma dos outros pesos não atingiria o mesmo número. Logo, as $81g$ serão postas em B_2. Sabendo disso, temos que a quantia de $27g$ não pode ser posta em B_2, pois caso contrário a soma dos pesos restantes também não atingiria o mesmo número. Logo as $27g$ serão postas em B_1 e daí podemos eliminar as alternativas (D) e (E).

Neste contexto, B_1 totaliza até agora $88g$ e B_2 $81g$. Observe então que devemos colocar $9g$ em B_2 por justificativa análoga aos casos anteriores. Assim, B_1 totaliza os mesmo $88g$ e B_2 passa a ter $90g$, restando então os pesos adicionais de $1g$ e $3g$. Portanto, a única forma de equilibrar os pratos da balança, ou seja, B_1 e B_2, é agrupar os pesos de $3g$ e $27g$ em B_1e os demais em B_2.

Alternativa correta: letra B.

QUESTÃO 10

A figura abaixo apresenta o gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ no intervalo $[-1,4]$.



Quantas soluções reais distintas possui a equação $3x^4 - 16x^3 + 18x^2 = -10$ no intervalo $[1,4]$?

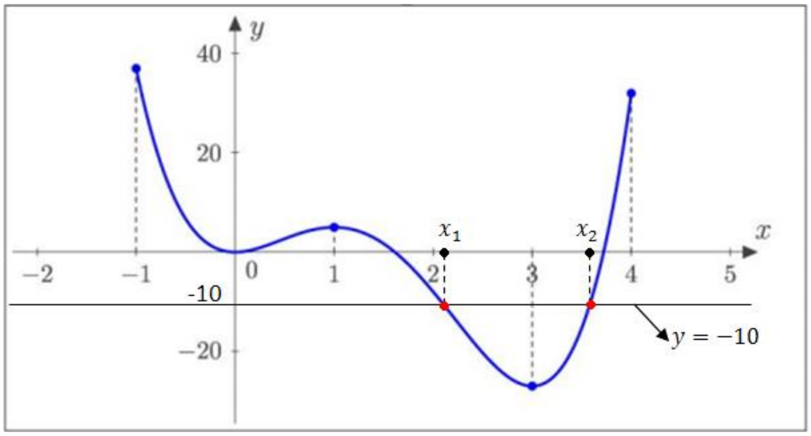
A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Uma solução [Paulo]

Queremos saber quantas soluções distintas tem

$$3x^4 - 16x^3 + 18x^2 = -10,$$

ou seja, temos que descobrir quantos valores de x, no intervalo $[-1, 4]$, satisfazem $f(x) = -10$. Para isto, basta traçar a reta $y = -10$ e observar em quais pontos ela intersecta o gráfico de f. Veja figura a seguir.



.

Note que $x_1, x_2 \in [-1, 4]$ são tais que $f(x_1) = f(x_2) = -10$ e, portanto, a equação $f(x) = -10$ possui duas soluções distintas, $x_1 \in (2, 3)$ e $x_2 \in (3, 4)$.

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 11

Dado que todos os A´s são B´s, mas apenas alguns B´s são C´s, qual das alternativas abaixo é certamente correta?

A) Nenhum A é C.
B) Se algo é C então ele também é B.
C) Todo A é C.
D) Ou nenhum A é C ou nenhum C é B.
E) Se algo não é B então ele não é A.

Uma solução [Sandra]

A alternativa $\boldsymbol{A}$ pode não ser verdadeira, pois através das informações dadas: se alguns B’s são C’s e o conjunto de todos os A’s está contido no conjunto de todos os B’s, então pode existir sim algum A que é C (Figura 1).

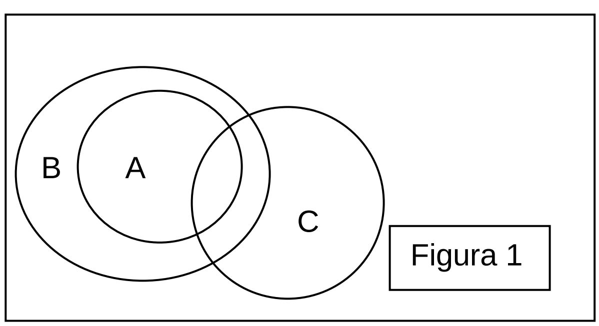


Figura 1

Podemos também eliminar as letras **B** e **C**. Em **B**, nada garante que se algo é C também é B, pois C pode não está contido em B, uma vez que APENAS ALGUNS B's são C's (Figura1).

Na alternativa **C** não podemos afirmar que todo A é C, pois sabendo que A está contido em B e que C pode não está contido em B, existe a possibilidade de nenhum A pertencer a C (Figura 2).

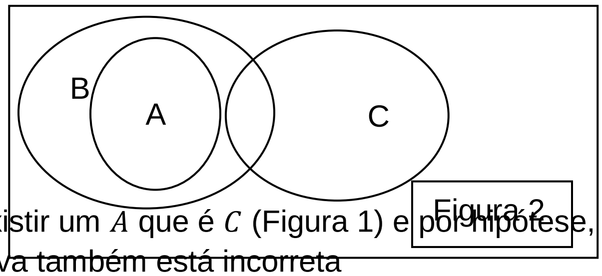


Figura 2

Na letra **D**, pode existir um A que é C (Figura 1) e por hipótese, obrigatoriamente, algum C é B. Portanto, essa alternativa também está incorreta

Por fim temos a alternativa correta, **E**: como A está contido em B, se algo não é B ele jamais será A.

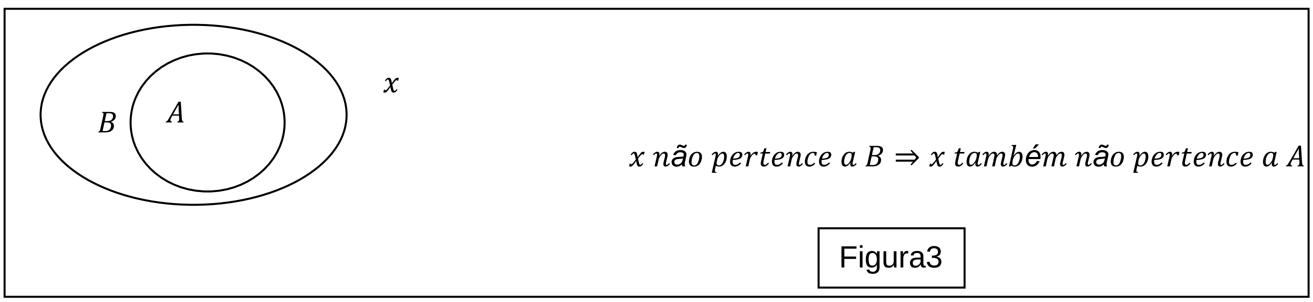
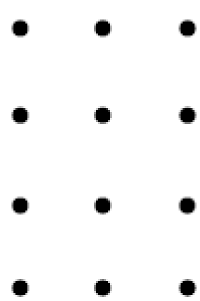


Figura3

Alternativa correta: letra E.

QUESTÃO 12

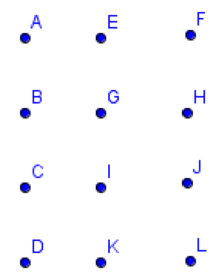
Os pontos da figura abaixo estão igualmente espaçados.



Quantos retângulos podemos traçar com vértices nesses pontos?

A) 6
B) 12
C) 16
D) 18
E) 20

Uma solução [Thiago]



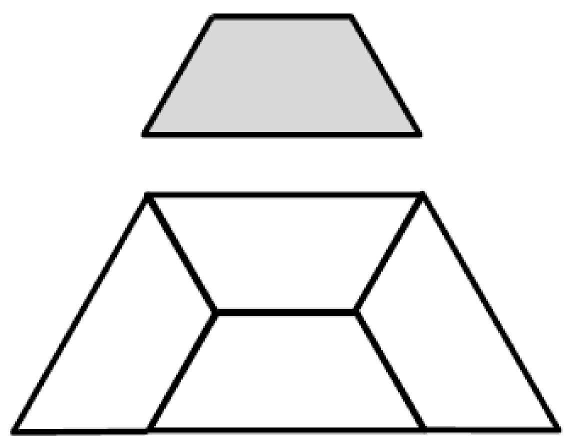
Tomemos a mesma figura com letras representando cada ponto, para facilitar nosso trabalho.

Os retângulos são: $AEGB$, $BGIC$, $CIKD$, $EFHG$, $GHIJ$, $IJLK$, $AFHB$, $BHJC$, $CJLD$, $AEKD$, $EFLK$, $AEIC$, $BGKD$, $EFJI$, $GHLK$, $AFJC$, $BHLD$, $AFLD$, $EHIB$ e $GJKC$ (dando um total de 20 retângulos, ou seja, o item E).

Alternativa correta: letra E.

QUESTÃO 13

Na figura ao lado, o quadrilátero grande é formado por 4 trapézios congruentes ao trapézio isósceles sombreado.



O perímetro do quadrilátero grande é 36 cm.

Qual é o perímetro do trapézio sombreado?

A) 9 cm
B) 12cm
C) 18cm
D) 36cm
E) 72cm

Uma solução [Alan]

Observando o quadrilátero grande, vemos que a base menor e os lados do trapézio usado na sua construção são iguais. Ainda como resultado da observação do quadrilátero grande, notamos que o ângulo obtuso do trapézio sombreado vale $120°$. Consequentemente, o ângulo agudo desse trapézio tem medida $60°$.

Sejam x a base maior do trapézio e y a base menor do trapézio. Denotando por A um dos vértices da base menor e por B o vértice da base maior consecutivo ao vértice A, seja C a projeção ortogonal de A sobre a base maior. Iremos trabalhar com o triângulo ABC.

Inicialmente, observemos que $x = 2a + y$, onde a denota a medida do lado BC do triângulo considerado. Temos, além disso, a seguinte informação:

$$\frac{1}{2} = \cos 60° = \frac{a}{y} \Rightarrow a = \frac{y}{2}.$$

Daí segue-se que $x = y + y = 2y$. Por outro lado, o perímetro do quadrilátero maior é dado por $4x + 2y = 8y + 2y = 10y$. Ao mesmo tempo, temos a informação que esse perímetro vale $36cm$ e, assim, segue que $y = 3{,}6cm$ e $x = 7{,}2cm$. Logo, o perímetro o trapézio sombreado é $x + 3y = 7{,}2cm + 10{,}8cm = 18cm$.

Alternativa correta: letra C.

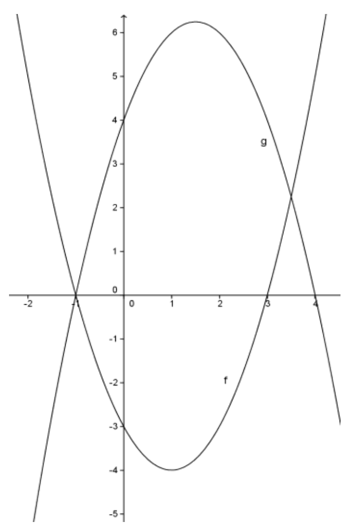
QUESTÃO 14

Considere as funções reais $x^2 - 2x - 3$ e $-x^2 + 3x + 4$. Assinale a alternativa falsa.

A) Se $x > 2$ então $f(x) > -3$
B) Se $-1 < x < 2$ então $f(x) \leq g(x)$
C) Se $f(x) \leq g(x)$ então $0 < x < 3$
D) Se $x < -1$ então $f(x) \cdot g(x) < 0$
E) $-1 \leq x \leq 7/2$ se, e somente se, $f(x) \leq g(x)$

Uma solução [André]

Podemos resolver essa questão analisando o gráfico das funções f e g, veja



Confrontando as afirmações dos quesitos com as informações extraídas do gráfico, podemos concluir que a alternativa falsa é o item C; pois pode ocorrer, por exemplo, $f(x) \leq g(x)$ com $-1 < x < 0$.

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 15

Ana, Beatriz, Carlos e Daniel pescaram 11 peixes. Cada um deles conseguiu pescar pelo menos um peixe, mas nenhum deles pescou o mesmo número de peixes que outro. Ana foi a que pescou mais peixes e Beatriz foi a que pescou menos peixes. Quantos peixes os meninos pescaram juntos?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Uma solução [Arthur]

Sejam A, B, C e D a quantidade de peixes que Ana, Beatriz, Carlos e Daniel pescaram, respectivamente.

Sabemos que $A + B + C + D = 11$, $A > B, C, D$ e $B < A, C, D$ e que A, B, C e D são diferentes dois a dois. Queremos determinar $C + D$. Analisemos esse problema fazendo as seguintes suposições:

Se $A + B = 8$, então $C + D = 3$ donde um dos dois deve ser 2 (suponha C) e o outro 1(suponha D). Isto não pode ocorrer já que B é o menor dentre A, C e D.

Se $A + B = 7$, então $C + D = 4$. Pelo mesmo argumento anterior não podemos ter $C = 1$ ou $D = 1$. Neste caso devemos ter necessariamente $C = D = 2$. Isto gera um absurdo já que $C \neq D$.

Se $A + B = 6$, temos $C + D = 5$. Assim, se considerarmos $A = 5$ e $B = 1$ podemos tomar $C = 3$ e $D = 2$ que não teremos nenhum problema. Logo, a alternativa c é uma candidata a ser a resposta procurada. Mesmo assim, analisemos as demais situações.

Se $A + B = 5$, teríamos $C + D = 6$ onde as possíveis combinações seriam $C = 2$ e $D = 4$, ou $C = D = 3$. O primeiro caso não pode ocorrer porque $A + B = 5$ implica $A = 4$ e $B = 1$ (na melhor das hipóteses). É imediato que $C = D = 3$ não pode ocorre.

Se $A + B = 4$, temos $C + D = 7$. Logo, $A + B = 4$ implicaria $A = 3$ e $B = 1$ (novamente, na melhor das hipóteses). Daí as possíveis combinações para C e D seriam

$$C = 1 \; e \; D = 6$$

$$C = 2 \; e \; D = 5$$

$$C = 3 \; e \; D = 4$$

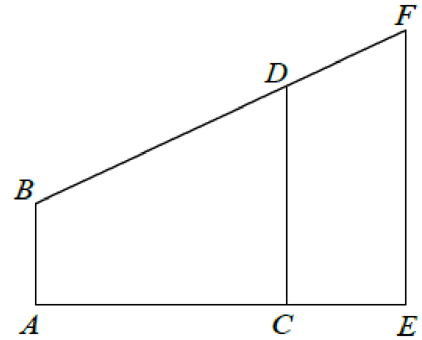
Nestas três situações, D sempre quebra a hipótese de A ser o maior entre eles. Portanto, a quantidade de peixes que os meninos pescaram juntos foi igual a 5.

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 16

Na figura ao lado os segmentos *AB*, *CD* e *EF* são perpendiculares à reta *AE* e medem, respectivamente, 40m, 82m e 100m.

Se o segmento *CE* mede 27m, o comprimento do segmento *AC* é:



A) 52cm
B) 56cm
C) 60cm
D) 63cm
E) 66cm

Uma solução [Felipe]

Chamemos de T o trapézio $ABFE$, T' o trapézio $CDFE$, T'' o trapézio $ABDC$ e AT, AT', AT'' suas respectivas áreas. Seja d o comprimento do segmento AC. Assim:

$$AT = AT' + AT'' \qquad (1)$$

$$AT = \frac{(100+40)\cdot(d+27)}{2} = \frac{140(d+27)}{2} = (70d + 70\cdot 27)\, m \qquad (2)$$

$$AT' = \frac{(100+82)\cdot 27}{2} = 91\cdot 27\, m \qquad (3)$$

$$AT'' = \frac{(82+40)\cdot d}{2} = 61d\, m \qquad (4)$$

De (1), (2), (3) e (4) obtemos:

$$70d + 70\cdot 27 = 91\cdot 27 + 61d \Rightarrow$$

$$70d - 61d = 91\cdot 27 - 70\cdot 27 \Rightarrow$$

$$(70-61)\cdot d = (91-70)\cdot 27 \Rightarrow$$

$$9d = 21\cdot 27 \Rightarrow$$

$$d = \frac{21\cdot 27}{9} \Rightarrow$$

$$d = 63\, m.$$

Alternativa correta: letra D.

QUESTÃO 17

Um número natural é chamado de *estranho* se seus algarismos são todos distintos e nenhum deles é 0 e é chamado de *belo* se todos os seus algarismos são pares. Quantos são os números de quatro algarismos que são estranhos ou belos?

A) 24
B) 500
C) 3024
D) 3500
E) 3548

Uma solução [Geovany]

Primeiro veremos as possibilidades para números naturais ESTRANHOS. Se todos os algarismo são distintos e diferentes do zero, então teremos 9 possibilidades para o primeiro algarismo, 8 para o segundo, 7 para o terceiro e 6 possibilidades para o quarto. Pelo princípio multiplicativo, obtemos $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ números estranhos de quatro algarismos. Agora calculemos a quantidade de números naturais BELOS. Como o primeiro algarismo não pode ser zero e os demais são pares não necessariamente distintos, vamos utilizar para o primeiro $2, 4, 6$ ou 8 (4 possibilidades) e para os seguintes $0, 2, 4, 6$ ou 8 (5 possibilidades). Com isso, temos $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ números belos de quatro algarismos. Logo, o total de números belos e estranhos com 4 algarismos vale: $3024 + 500 = 3524$ subtraído da quantidade de números que são belos e estranhos simultaneamente.

Para que um número seja estranho e belo ao mesmo tempo, é necessário que seus algarismos sejam distintos, pares ($2, 4, 6$ ou 8) e não-nulos, ou seja, teremos $4! = 24$ possibilidades. Subtraindo esse valor de 3524, obtemos 3500 números de quatro algarismos que são estranhos ou belos.

Alternativa correta: letra D.

QUESTÃO 18

Considere os números reais $a = \frac{2}{1-\sqrt{2}} + \sqrt{8}$, $b = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$, $c = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^3-7}{4\sqrt{2}}$.

A opção verdadeira é:

A) a e b são ambos irracionais e c é racional.
B) a e b são ambos inteiros e c é racional.
C) a e c são ambos racionais e b é irracional
D) a é inteiro, b é racional e c é irracional
E) a é racional e b e c são ambos irracionais

Uma solução [Juarez]

Temos que:

$$\text{i) } a = \frac{2}{1-\sqrt{2}} + \sqrt{8} = \frac{2 + \left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{8}}{1-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{8}-\sqrt{16}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-2+\sqrt{8}}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-2+\sqrt{8}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})} = \frac{-2-2\sqrt{2}+\sqrt{8}+4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{2}-2} = \frac{2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{-1} = -2.$$

Logo, a é racional.

$$\text{ii) } b = (1+\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}\,.$$

Daí, b é irracional.

$$\text{iii) } c = \frac{(1+\sqrt{2})^3 - 7}{4\sqrt{2}} = \frac{1 + 3\sqrt{2} + 6 - 7}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

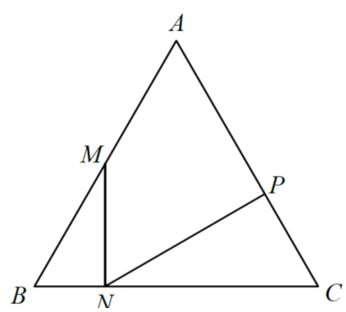
Portanto, c é racional.

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 19

Na figura ao lado, *ABC* é um triângulo equilátero, *M* é o ponto médio do lado *AB*, o segmento *MN* é perpendicular ao lado *BC* e o segmento *NP* é perpendicular ao lado *AC*. Sabendo que AP$= 12$ unidades, a medida do lado do triângulo *ABC* nessa mesma unidade é:

A) $15{,}2$
B) $16{,}4$
C) $17{,}5$
D) $18{,}6$
E) $19{,}2$



Uma solução [Juliérika]

Seja $\overline{PC} = x$. Como o triângulo ABC é equilátero, seus ângulos internos medem $60°$. Daí, os ângulos $P\widehat{N}C$ e $B\widehat{M}N$ valem $30°$, pois, NMB e CPN são triângulos retângulos.

No triângulo PNC temos

$$\text{sen } P\widehat{N}C = \text{sen } 30° = \frac{x}{\overline{NC}} \Rightarrow \overline{NC} = 2x.$$

Enquanto que,

$$\text{sen } B\widehat{M}N = \text{sen } 30° = \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} \Rightarrow \overline{BM} = 2\overline{BN}\,.$$

Daí, sabemos que $\overline{AC} = \overline{AB} = 2(\overline{BM}) = 4\overline{BN}$ e substituindo na equação $\overline{AC} = \overline{BN} + \overline{NC}$, obtemos $\overline{NC} = 3\overline{BN}$. Logo,

$$12 + x = 4\overline{BN} \Rightarrow 12 + x = \frac{4}{3}\overline{NC} \Rightarrow 12 + x = \frac{4}{3} \cdot (2x) \Rightarrow x = \frac{36}{5} = 7{,}2.$$

Donde, segue-se que $\overline{AC} = 12 + 7{,}2 = 19{,}2$.

Alternativa correta: letra E.

QUESTÃO 20

Uma amostra de água salgada apresenta 18% de salinidade. Isto significa que em 100 gramas da amostra teremos 18 gramas de sais e 82 gramas de água. Qual a melhor aproximação do percentual de água da amostra a ser evaporado se quisermos obter 30% de salinidade?

A) 30%
B) 36%
C) 42%
D) 49%
E) 58%

Uma solução [Matheus]

Seja X a massa da amostra após a evaporação de $x\%$ da água. Podemos supor que a massa inicial da amostra é $100g$, desse modo, como a quantidade de sais não muda com a evaporação da água, deve-se ter

$$18 = 30\% \cdot X \Rightarrow X = \frac{18 \cdot 10}{3} \Rightarrow X = 60.$$

Logo, $40g$ da amostra foi evaporada. Com essa informação podemos obter $x\%$, pois, $40 = x\% \cdot 82$. Daí,

$$x = \frac{40 \cdot 100}{82} \Rightarrow x = \frac{4000}{82} \cong \frac{4000}{80} = \frac{400}{8} = 50.$$

Alternativa correta: letra D.

QUESTÃO 21

Assinale a alternativa verdadeira:

A) Se x é um número real positivo, então $x^6 > x^4$.
B) Se x é um número real e $x^2 = x$, então $x = 1$.
C) Se $x > 200$ e $y > 4$ então $\frac{x}{y} > 50$.
D) Se x é um número real então $x^2 \geq -x$.
E) Se $x(x^2 - 2x + 1) = 0$ então $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2$.

Uma solução [Michell]

Vamos resolver esta questão utilizando o método de eliminação. De fato, (a) é falsa. Basta tomar $x = 1$ e teremos $1^6 = 1^4$. Para (b), observe que (pela contrapositiva) ela possui o mesmo valor lógico da sentença

"se x é um número real e $x \neq 1$, então $x^2 \neq x$".

Assim, sendo $x = 0$ vale $x \neq 1$ e $x^2 = x$. Portanto, (b) é falsa. Para a alternativa (c), tomemos $x = 225 > 200$ e $y = 5 > 4$. Segue então $\frac{x}{y} = 45 < 50$. Logo, (c) é falsa. (d) também é falsa; escolhendo $x = \frac{-1}{2}$, vem

$$x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = -x.$$

Por eliminação, concluímos que (E) é verdadeira.

Alternativa correta: letra E.

QUESTÃO 22

De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros distintos, de 1 a 20, de forma que a soma seja par?

A) 1620
B) 810
C) 570
D) 720
E) 120

Uma solução [Paulo]

Entre 1 e 20 figuram dez números pares e dez ímpares. Para que a soma de três inteiros distintos no intervalo $[1, 20]$ seja par, basta escolhermos todos pares, o que pode ser realizado de $\binom{10}{3}$ maneiras, ou escolhe-los de modo a se configurarem como dois ímpares e um par, o que pode ser realizado de $\binom{10}{2}\binom{10}{1}$ maneiras. Assim, se T é o número de maneiras que podemos escolher os três inteiros nas condições do problema, então

$$\begin{aligned} T &= \binom{10}{3} + \binom{10}{2}\binom{10}{1} \\ &= \frac{10!}{7!\,3!} + \frac{10!}{8!\,2!}\,\frac{10!}{10!\,1!} \\ &= 120 + 450 \end{aligned}$$

$$= 570.$$

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 23

Sejam $a = 2^{7000}$, $b = 5^{3000}$ e $c = 13^{2000}$. Assinale a alternativa correta:

A) $b < a < c$
B) $a < b < c$
C) $c < b < a$
D) $a < c < b$
E) $b < c < a$

Uma solução [Sandra]

Sendo $a = 2^{7000}$, basta elevar ambos os membros a potência $\frac{1}{1000}$ para obtermos:

$$a^{\left(\frac{1}{1000}\right)} = (2)^{\left(\frac{7000}{1000}\right)} = 2^7 = 128.$$

Fazendo o mesmo com b e c, temos:

$$b^{\left(\frac{1}{1000}\right)} = 5^3 = 125$$

e

$$c^{\left(\frac{1}{1000}\right)} = 13^2 = 169.$$

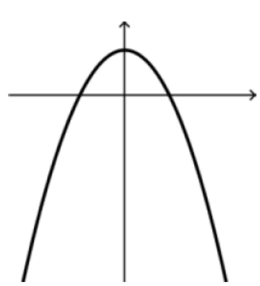
Logo, tem-se

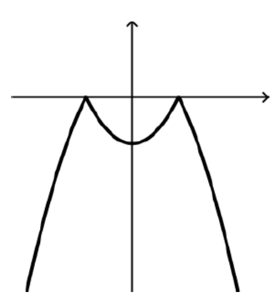
$$b^{\left(\frac{1}{1000}\right)} < a^{\left(\frac{1}{1000}\right)} < c^{\left(\frac{1}{1000}\right)} \Rightarrow b < a < c.$$

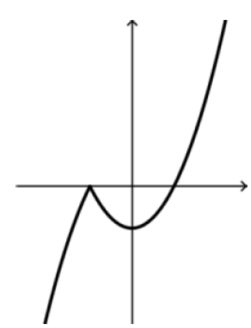
Alternativa correta: letra A.

QUESTÃO 24

O gráfico que melhor representa a função $f(x) = -|1 - x^2|$ é:

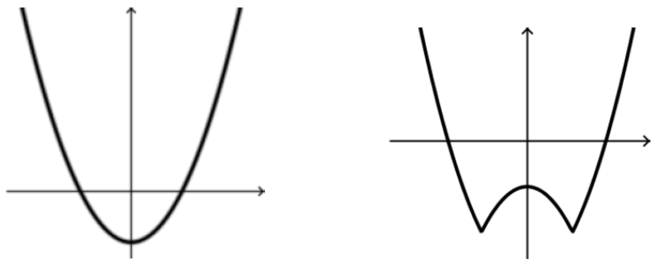
A) 

B) 

C) 

D)

E)



Uma solução [Thiago]

Basta observar que

$$|1 - x^2| \geq 0 \Rightarrow -|1 - x^2| \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0,$$

para todo x real. Isto é, a imagem de f é o intervalo $(-\infty, 0]$ e o único gráfico que tem essa propriedade é o do item B.

Alternativa correta: letra B.

QUESTÃO 25

Quantos múltiplos de 5 existem com 4 algarismos diferentes?

A) 448
B) 504
C) 546
D) 952
E) 1008

Uma solução [Alan]

Para obtermos o valor procurado, lembramos que todo número que é múltiplo de 5 deve ser terminado com 0 ou 5. Observando isso, nossa resolução segue abaixo:

1º.caso: números de quatro algarismos diferentes que terminam em zero.

Fixado o zero na casa das unidades, restam 9 possibilidades para a dezena, 8 possibilidades para a centena e 7 possibilidades para o milhar. Assim, a quantidade de múltiplos de cinco nesse caso é $9 \times 8 \times 7 = 504$.

2º.caso: números de quatro algarismos diferentes que terminam em cinco.

Fixado o cinco na casa das unidades, restam 8 possibilidades para o milhar (observe que o zero não pode ser escolhido para esta posição), 8 possibilidades para a centena e 7 possibilidades para a dezena. Assim, a quantidade de múltiplos de cinco nesse caso é $8 \times 8 \times 7 = 448$.

Concluímos, dessa forma, que a quantidade de múltiplos de cinco com quatro algarismos diferentes é $504 + 448 = 952$.

Alternativa correta: letra D.

QUESTÃO 26

Em Eletrostática, o módulo E do campo elétrico gerado por uma única carga elétrica pontual de carga q em um ponto a uma distância d da carga é diretamente proporcional a q e inversamente proporcional ao quadrado de d. Considere uma carga elétrica com carga q constante e seja $E = f(d)$, com $d > 0$, a função que descreve o módulo E do campo elétrico em um ponto a uma distância d dessa carga. Dessa forma, é correto afirmar que $f(2d)$ é igual a:

A) $f(d)/4$
B) $4 \cdot f(d)$
C) $f(d)$
D) $f(d)/2$
E) $2 \cdot f(d)$

Uma solução [André]

Como o módulo de $E = f(d)$ é inversamente proporcional ao quadrado de d, ou seja,

$$f(d) = f(d \cdot 1) = \frac{f(1)}{d^2},$$

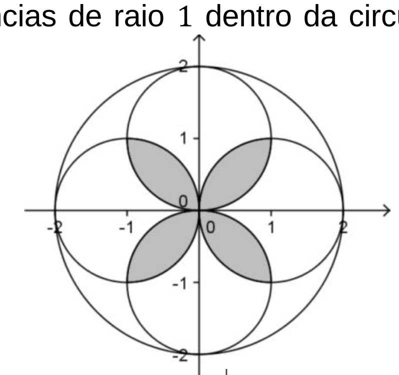
tem-se

$$f(2d) = f(2d \cdot 1) = \frac{f(1)}{(2d)^2} = \frac{1}{4}\frac{f(1)}{d^2} = \frac{1}{4}f(d).$$

Alternativa correta: Letra A.

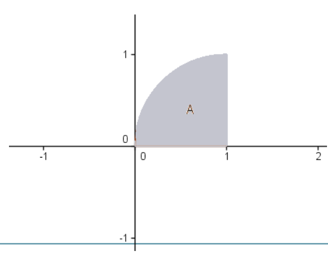
QUESTÃO 27

Observe o desenho ao lado com as quatro circunferências de raio 1 dentro da circunferência de raio 2. A área sombreada é igual a:



A) $2\pi - 2$
B) $\pi/3$
C) $2\pi - 4$
D) $\pi/2$
E) $\pi - \sqrt{\pi}$

Uma solução [Arthur]



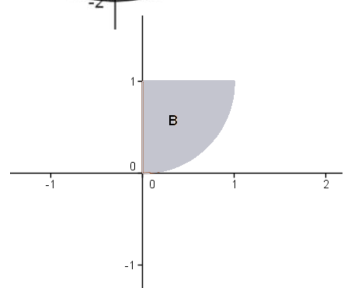


Figura 1 **Figura 2**

Observe, na figura 1, que a área A equivale a $1/_4$ da área delimitada pela circunferência de raio 1, assim

$$A = \frac{1}{4}\pi.1^2 = \frac{\pi}{4}$$

De maneira análoga, com base na figura 2, vemos que

$$B = \frac{1}{4}\pi.1^2 = \frac{\pi}{4}$$

Seja $I = A \cap B$. Logo a área do quadrado de lado 1 é dada por

$$1.1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - I = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - 1$$

Portanto, a área total T da região sombreada é

$$T = 4I = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \Rightarrow T = 2\pi - 4$$

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 28

Um grupo de pessoas gastou 120 reais em uma lanchonete. Quando foram pagar a conta, dividindo-a igualmente, notaram que duas pessoas foram embora sem deixar dinheiro e as pessoas que ficaram tiveram que pagar cinco reais a mais que pagariam se a conta fosse dividida igualmente entre todos os membros do grupo inicial. Quantas pessoas pagaram a conta?

A) 4
B) 6
C) 7
D) 9
E) 10

Uma solução [Felipe]

Consideremos:

$x :=$ a quantidade inicial de pessoas.

$y :=$ quantidade de dinheiro que as x pessoas deveriam pagar.

Por hipótese temos:

$$x \cdot y \;=\; 120 \qquad (1)$$

$$(x-2)\cdot(y+5) = 120 \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), obtemos:

$$x\cdot y = (x-2)\cdot(y+5) \Rightarrow$$

$$x\cdot y = x\cdot y + 5x - 2y - 10 \Rightarrow$$

$$-(x\cdot y) + x\cdot y = -(x\cdot y) + x\cdot y + 5x - 2y - 10 \Rightarrow$$

$$0 = 5x - 2y - 10 \Rightarrow$$

$$2y = 5x - 10 \Rightarrow$$

$$y = \frac{5x-10}{2}. \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1),

$$x\cdot\left(\frac{5x-10}{2}\right) = 120 \Rightarrow$$

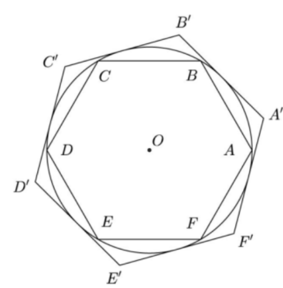
$$5x^2 - 10x = 240 \Rightarrow$$

$$5x^2 - 10x - 240 = 0. \qquad (4)$$

Note que as raízes da equação (4) são $x = 8$ ou $x = -6$. Como neste problema x é estritamente positivo, concluímos que $x = 8$. Mas, como duas pessoas foram embora sem pagar a quantidade de pessoas que pagaram a conta será igual a $x - 2$, ou seja, 6 pessoas pagaram a conta.

QUESTÃO 29

Na figura ao lado, os hexágonos regulares $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ estão, respectivamente, inscrito e circunscrito à uma circunferência de centro O. A razão

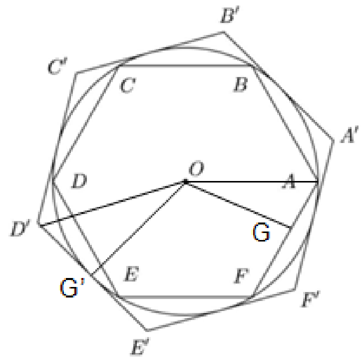


$$\frac{\text{área}(A'B'C'D'E'F')}{\text{área}(ABCDEF)}$$

vale:

A) $3/2$
B) $4/3$
C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$
E) 2

Uma solução [Geovany]



Tem-se:

$$\frac{\text{área}(A'B'C'D'E'F')}{\text{área}(ABCDEF)} = \frac{6 \cdot área(OD'E')}{6 \cdot área(OAF)} = \frac{6 \cdot \frac{D'E' \cdot OG'}{2}}{6 \cdot \frac{AF \cdot OG}{2}} = \frac{D'E' \cdot OG'}{AF \cdot OG}. \qquad (*)$$

Queremos determinar o valor da razão no último membro das igualdades acima.

Note que o triângulo OAF é equilátero. Assim, $AF = OA = r$, onde r é o raio da circunferência. Com isso, podemos calcular o valor de OG aplicando o teorema de Pitágoras em OAG, da seguinte forma:

$$r^2 = OG^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow OG = \frac{\sqrt{3}r}{2}.$$

Se G' é o ponto de tangência entre $D'E'$ e a circunferência, então $OG' = r$ e é perpendicular a $D'E'$. Agora podemos calcular OD', temos

$$(OD')^2 = \left(\frac{OD'}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow OD' = D'E' = 2\frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Substituindo os valores em $(*)$,

$$\frac{\text{área}(A'B'C'D'E'F')}{\text{área}(ABCDEF)} = \frac{D'E' \cdot OG'}{AF \cdot OG} = \frac{\left(2\frac{r}{\sqrt{3}} \cdot r\right)}{r \cdot \frac{\sqrt{3}r}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.$$

Alternativa correta: letra B.

QUESTÃO 30

Dona Ana distribuiu 300 balas entre seus sobrinhos Beatriz, Caio Daniela e Eduardo da seguinte maneira: deu uma bala para Beatriz, duas balas para Caio, 3 balas para Daniela, 4 balas para E-duardo, 5 balas para Beatriz, 6 balas para Caio e assim sucessivamente. Quantas balas Daniela recebeu de sua tia Ana?

A) 66
B) 72
C) 78
D) 84
E) 88

Uma solução [Juarez]

Fazendo a distribuição das balas que Dona Ana distribuiu entre sues sobrinhos, temos:

Beatriz	1 bala	5 balas	9 balas	13 balas	17 balas	21 balas
Caio	2 balas	6 balas	10 balas	14 balas	18 balas	22 balas
Daniela	3 balas	7 balas	11 balas	15 balas	19 balas	23 balas
Eduardo	4 balas	8 balas	12 balas	16 balas	20 balas	24 balas

Somando as balas recebidas por Daniela, obtemos:

$$3 \text{ balas} + 7 \text{ balas} + 11 \text{ balas} + 15 \text{ balas} + 19 \text{ balas} + 23 \text{ balas} = 78 \text{ balas}.$$

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 31

Considere o sistema $\begin{cases} x^2y - y^2 = 0 \\ x^3 + x^2 - xy - y = 0 \end{cases}$ e as 3 afirmações abaixo.

I) Existem infinitos pares (x, y) de números reais que são soluções do sistema.
II) Todas as soluções do sistema são da forma $(x, 0)$, para algum x real.
III) Não há nenhuma solução do sistema da forma $(x, -8)$, com x real.

São verdadeiras:

A) Somente I.
B) Somente II.
C) Somente III.
D) Somente I e II.
E) Somente I e III.

Uma solução [Juliérika]

Reescrevendo o sistema, pondo fatores comuns em evidência, obtemos

$$\begin{cases} y \cdot (x^2 - y) = 0 \\ (x^2 - y) \cdot (x + 1) = 0. \end{cases}$$

Como os produtos nas equações anteriores são de números reais, deve-se ter necessariamente algum fator igual a 0 em cada equação. Então,

1) Devemos ter:
   a. Ou $y = 0$,
   b. Ou $(x^2 - y) = 0$, o que implica $y = x^2$. Com isto obtemos uma solução do tipo (x, x^2) com $x \in \mathbb{R}$, pois, o fator $(x^2 - y)$ também aparece na equação 2. Com este resultado verifica-se que a primeira afirmação I é verdadeira.
2) Analisemos o fator restante:
   a. Se for $x + 1 = 0$, deve ocorrer $x = -1$. Assim, substituindo $x = -1$ na primeira equação do sistema, obtemos $y \cdot (1 - y) = 0$ o que implica $y = 0$ ou $y = 1$. Sendo assim, o par $(-1, 1)$ é solução do sistema, isto prova que a segunda afirmação II é falsa.

Desse modo, só nos resta avaliar a afirmação III. Substituindo $y = -8$ na primeira equação do sistema, obtemos

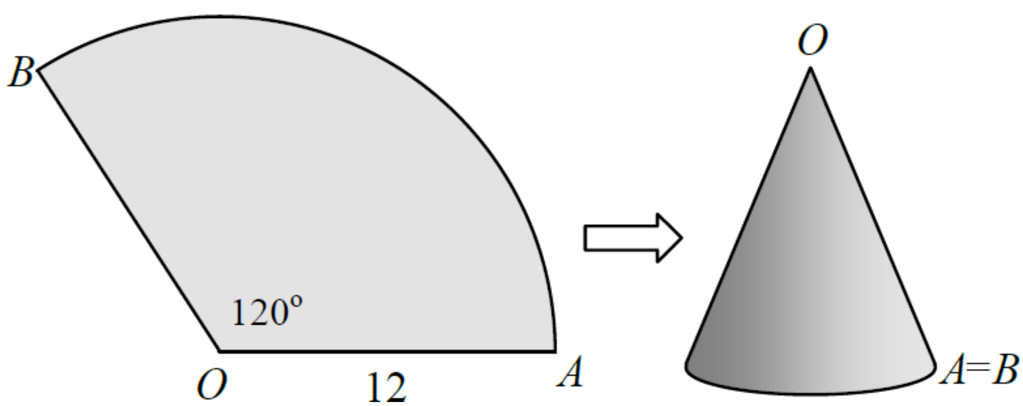
$$x^2(-8) - (-8)^2 = 0 \Rightarrow -8x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-8}.$$

Com isto, provamos que a terceira afirmação III é verdadeira, pois, $x = \sqrt{-8}$ não é um numero real. Logo, I e III são verdadeiras.

Alternativa correta: letra E.

QUESTÃO 32

Pedro recorta em uma folha de papel um setor circular *OAB* de raio 12cm e ângulo de $120°$. Juntando e colando os raios *OA* e *OB* ele faz um cone como mostra a figura abaixo



A altura desse cone é aproximadamente:

A) 9,6cm
B) 10,4cm

C) 10,8cm
D) 11,3cm
E) 11,7cm

Uma solução [Matheus]

Seja O' o pé da perpendicular baixada de O, sobre o plano que contém a circunferência formada pela base do cone. O triângulo $OO'A$ é retângulo. Assim, o problema passa a ser o de determinar a medida do segmento OO', que pode ser obtido aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $OO'A$,

$$12^2 = \overline{O'A}^2 + \overline{OO'}^2 \Rightarrow \overline{OO'} = \sqrt{144 - \overline{O'A}^2}.$$

Para obter a medida $\overline{O'A}$, basta notar que este é o raio da circunferência do arco AB. Mas o comprimento do arco AB é produto do raio 12 pelo ângulo $A\hat{O}B$ em radianos, que vale $2 \cdot \frac{\pi}{3}$rad. Assim, obtemos $\widehat{AB} = 12 \cdot (2 \cdot \pi/3)$ e daí relacionamos o comprimento da circunferência com seu raio:

$$2\pi\overline{O'A} = 12 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow \overline{O'A} = 4.$$

Desse modo, substituindo esse valor na primeira equação, obtemos

$$\overline{OO'} = \sqrt{144 - 16} \Rightarrow \overline{OO'} = \sqrt{128} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2} \cong 8 \cdot 1{,}4 = 11{,}2.$$

Logo, a altura desse cone é aproximadamente $11{,}2$.

Alternativa correta: Letra D.

QUESTÃO 33

Um grupo de agricultores trabalha no corte da cana em duas glebas de terra. Admita que todos possuem a mesma velocidade de trabalho (medida em área cortada por unidade de tempo) e que uma das glebas tenha o dobro da área da outra. Até a metade do dia todos trabalham juntos na gleba maior e, na outra metade do dia, metade dos trabalhadores passa a cortar a cana da gleba menor, enquanto a outra metade continua cortando grama na gleba maior. No final deste dia, os trabalhadores terminaram de cortar toda a cana da gleba maior, mas um trabalhador demorou mais um dia inteiro para terminar de cortar a cana da gleba menor. Quantos trabalhadores havia no grupo?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

Uma solução [Michell]

Inicialmente denotemos por A_1 a área do terreno maior, por A_2 a área do terreno menor e x o número total de trabalhadores. Temos então $A_1 = 2A_2$.

Assim, de acordo com os dados da questão, $x + \frac{x}{2}$ trabalhadores capinaram A_1 em 2 turnos. Além disso, $\frac{x}{2}$ trabalhadores capinaram parte de A_2 em um turno, sendo necessário mais um trabalhador capinar em dois turnos para que A_2 fosse devidamente concluída. Ora, já que supostamente todos os trabalhadores possuem a mesma velocidade de trabalho, então $\frac{x}{2} + 2$ trabalhadores teriam capinado A_2 em um único turno. Equivalentemente, $x + 4$ trabalhadores teriam capinado $2A_2$ em dois turnos.

Logo vale a seguinte relação:

$$2\ turnos \longrightarrow x + \frac{x}{2} trabalhadores \longrightarrow A_1 = 2A_2$$

$$2\ turnos\ \longrightarrow x + 4\ trabalhadores \longrightarrow 2A_2$$

Portanto,

$$x + \frac{x}{2} = x + 4 \Rightarrow x = 8.$$

Alternativa correta: letra C.

QUESTÃO 34

Considere todos os números inteiros positivos escritos com exatamente cinco algarismos ímpares distintos. Qual é o valor da soma desses números?

A) 6666600
B) 6666000
C) 6660000
D) 6600000
E) 6000000

Uma solução [Paulo]

Considere o conjunto

$$X = \{(a_1a_2a_3a_4a_5)\,;\ a_i \in \{1,3,5,7,9\}\ e\ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}.$$

Perceba que X é o conjunto de todos os números inteiros positivos escritos com exatamente cinco algarismos ímpares distintos, além disso, pelo princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo, X possui $5! = 120$ elementos e pode ser listado como $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{120}\}$. Para cada elemento $(a_1a_2a_3a_4a_5) \in X$, existe um único elemento $(a_1^{'}a_2^{'}a_3^{'}a_4^{'}a_5^{'}) \in X$ tal que

$$a_i + a_i^{'} = 10,\ i = 1,2,3,4,5.$$

Assim,

$$a_1a_2a_3a_4a_5 + a_1^{'}a_2^{'}a_3^{'}a_4^{'}a_5^{'} = 111.110\ .$$

Podemos, então, obter 60 pares de elementos de X cuja soma de cada par vale 111.110. Logo,

$$\sum_{k=1}^{120} x_k = (60) \cdot (111.110) = 6.666.600.$$

Alternativa correta: letra A.

QUESTÃO 35

Sejam x e y números inteiros tais que $10x + y$ seja um múltiplo de 7. Assinale a resposta correta.

A) $x - 2y$ será certamente um múltiplo de 7
B) $2 + y$ será certamente um múltiplo de 7
C) $x - y$ será certamente um múltiplo de 7
D) $2x - y$ será certamente um múltiplo de 7
E) $2x + 2y$ será certamente um múltiplo de 7

Uma solução [Sandra]

Se $10x + y$ é um múltiplo de 7, então:

$$10x + y = 7q,$$

para algum $q\ \in Z$. Logo,

$$y = 7q - 10x.$$

Substituindo o valor de y na alternativa A, temos:

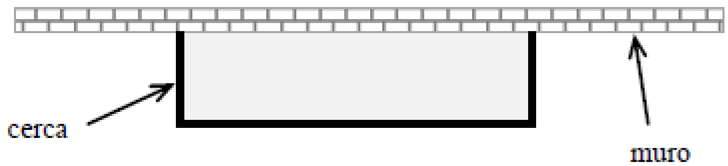
$$\begin{aligned} x - 2(7q - 10x) &= x - 14q + 20x \\ &= 21x - 14q \\ &= 7(3x - 2q) \\ &= 7q_1, \end{aligned}$$

com $q_1 = 3x - 2q$ inteiro. Portanto, $x - 2y$ é múltiplo de 7.

Alternativa correta: letra A.

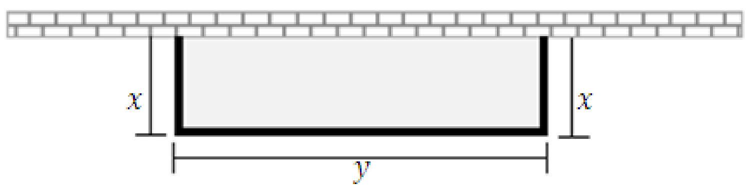
DISCURSIVA 1

Um fazendeiro deseja delimitar uma área retangular utilizando 40m de cerca e aproveitando um muro (de mais de 40m) que já está construído. Determine as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro consegue delimitar.



Uma solução [Paulo]

Sejam x e y, respectivamente, a largura e o comprimento do retângulo. Ver figura abaixo



Sabemos que a cerca mede $40m$, isto é,

$$2x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - 2x.$$

Além disso, a área A do retângulo pode ser encarada como uma função de x, sendo

$$A(x) = xy = x(40 - 2x) \Rightarrow$$

$$A(x) = -2x^2 + 40x.$$

Perceba que A é uma função quadrática ($f(x) = ax^2 + bx + c$) com $a = -2 < 0$, logo possui um valor máximo y_v, que é a ordenada do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola que representa o gráfico de A. Sabemos que

$$y_v = A(x_v)$$

e o valor de x_v pode ser calculado da seguinte forma,

$$x_v = -b/2a \Rightarrow$$

$$x_v = \frac{-40}{2 \cdot (-2)} = 10.$$

Assim, obteremos a área máxima delimitada pela cerca, quando o retângulo possuir largura $x = 10m$ e comprimento y tal que

$$y = 40 - 2 \cdot (10) \Rightarrow$$

$y = 20m.$

Outra maneira de solucionar este problema é usando a derivada da função A. Temos,

$A'(x) = -4x + 40.$

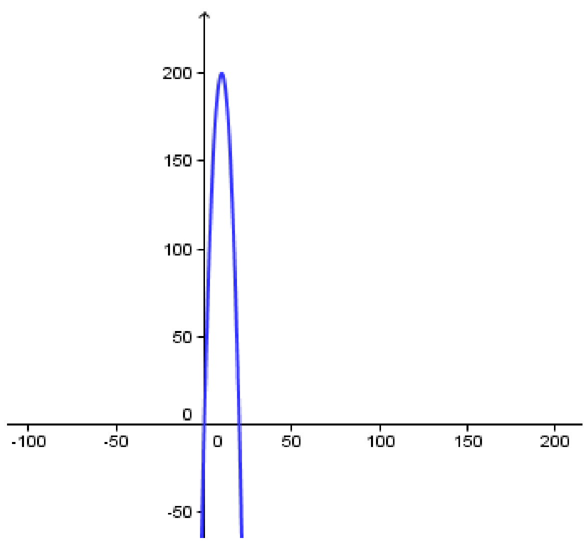
Note que

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

e, além disso,

$$\begin{cases} A'(x) > 0 \text{ se } x < 10 \\ A'(x) < 0 \text{ se } x > 10. \end{cases}$$

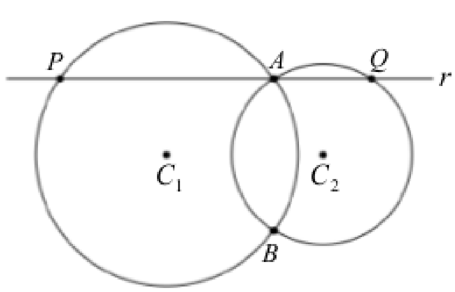
Nestas condições, A assume seu valor máximo em $x = 10$. Assim, $y = 40 - 2x = 20$ e as dimensões do retângulo de maior área que o fazendeiro pode delimitar são $10m$ de largura e $20m$ de comprimento.

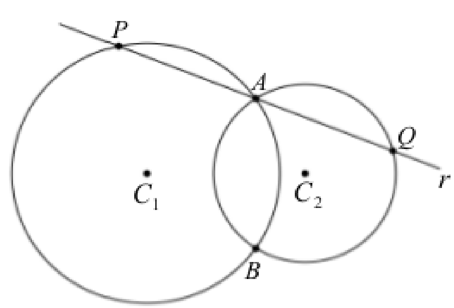


DISCURSIVA 2

As figuras a seguir mostram duas circunferências distintas, com centros e que se intersectam nos pontos A e B. Uma reta r passa por A, corta a circunferência da esquerda em P e a circunferência da direita em Q e é tal que A está entre P e Q.

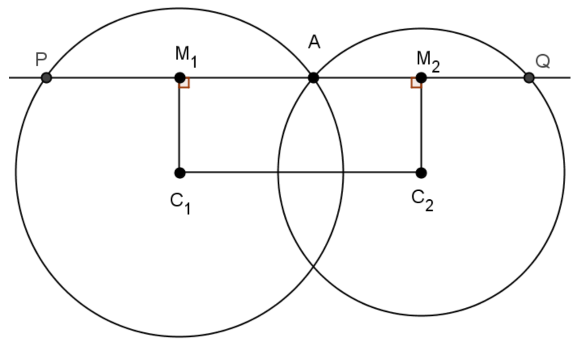
a) Mostre que se r é paralela a reta C_1C_2 o segmento PQ é o dobro do segmento C_1C_2.
b) Mostre que se r não é paralela a reta C_1C_2 o segmento PQ é menor que o dobro do segmento C_1C_2.





Uma solução [André]

Se r é paralela a C_1C_2, podemos construir os segmentos C_1M_1 e C_2M_2 ambos mutuamente perpendiculares a C_1C_2 e r como na figura a seguir.



Nestas condições

$$M_1M_2 = C_1C_2,$$

pois são lados opostos de um paralelogramo.

Lema: Se o raio de uma circunferência intersecta uma de suas cordas perpendicularmente, a interseção se dá no ponto médio da corda.

Este resultado se demostra estudando o triângulo isósceles formado pelo centro da circunferência e os extremos da corda.

Lançando mão do Lema apresentado concluímos que M_1e M_2 são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos PA e AQ e assim,

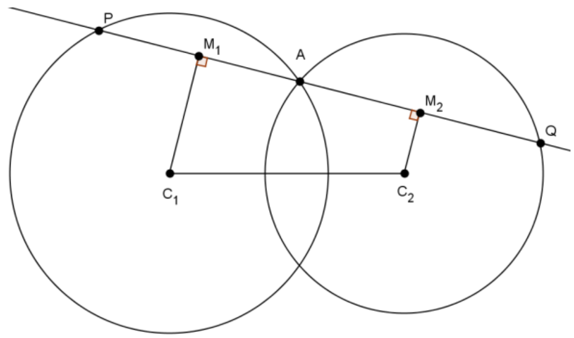
$$PA = 2M_1A(*) \quad \text{e} \quad AQ = 2AM_2. \qquad (**)$$

Desse modo,

$$PQ = PA + AQ = 2M_1A + 2AM_2 = 2(M_1A + AM_2) = 2M_1M_2 = 2C_1C_2.$$

Considerando agora o caso em que r não é paralela a C_1C_2, façamos a seguinte construção:

Tracemos segmentos perpendiculares à reta r passando pelos pontos C_1 e C_2 como na figura a seguir.



Como M_1C_1 e M_2C_2 são, por construção, perpendiculares à uma mesma reta, temos

$$M_1C_1 // M_2C_2.$$

É sabido que a menor distância entre duas retas paralelas é a medida do segmento perpendicular a ambas. Assim,

$$M_1M_2 < C_1C_2.$$

A construção efetuada neste caso nos permite utilizar novamente o Lema apresentado anteriormente e as equações $(*)$ e $(**)$ continuam válidas.

Diante disso podemos escrever:

$$PQ = PA + AQ = 2M_1A + 2AM_2 = 2(M_1A + AM_2) = 2M_1M_2 < 2C_1C_2.$$

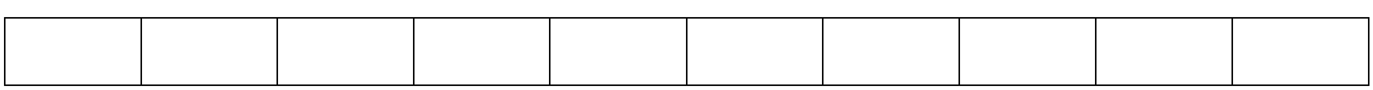
DISCURSIVA 3

Um engenheiro fará uma passarela de 10 metros de comprimento, ligando a porta da casa ao portão da rua. A passarela terá 1 metro de largura e ele, para revesti-la, dispõe de 10 pedras quadradas de lado 1 metro e 5 pedras retangulares de 1 metro por 2 metros.

Todas as pedras são da mesma cor, as pedras de mesmo tamanho são indistinguíveis umas das outras e o rejunte ficará aparente, embora com espessura desprezível. De quantas maneiras ele pode revestir a passarela?

Uma solução [Alan]

Para obter o total de maneiras de o engenheiro construir a passarela, vamos visualizar essa passarela como um retângulo subdividido em dez quadrados 1×1:



1º.caso: Nenhuma pedra de dimensão 1×2. Nesse caso, só há 1 maneira de revestir a passarela: pondo todas as pedras de dimensão 1×1.

2º.caso: Uma pedra de dimensão 1×2. Nesse caso, como uma pedra de dimensão 1×2 corresponde a duas pedras de dimensão 1×1 , precisamos preencher nove espaços escolhendo onde dispor a pedra de dimensão 1×2 . O número de maneiras que isso pode ser feito é: $\binom{9}{1} = 9$.

3º.caso: Duas pedras de dimensão 1×2. Nesse caso, como duas pedras de dimensão 1×2 correspondem a quatro pedras de dimensão 1×1 , precisamos preencher oito espaços escolhendo onde dispor as duas pedras de dimensão 1×2 . O número de maneiras que isso pode ser feito é: $\binom{8}{2} = 28$.

4º.caso: Três pedras de dimensão 1×2. Nesse caso, como três pedras de dimensão 1×2 correspondem a seis pedras de dimensão1×1, precisamos preencher sete espaços escolhendo onde dispor as três pedras de dimensão 1×2 . O número de maneiras que isso pode ser feito é: $\binom{7}{3} = 35$.

5º.caso: Quatro pedras de dimensão 1×2. Repetindo o mesmo argumento usado nos casos anteriores, vemos que o número de maneiras de construir a passarela nesse caso é: $\binom{6}{4} = 15$.

6º.caso: Cinco pedras de dimensão 1×2. Mais 1 maneira de construção.

Diante disso, a passarela pode ser revestida pelo engenheiro de $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$ maneiras.