Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciência e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Programa de Educação Tutorial
Tutor: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Uma Conversa Sobre Números Transcendentes

André Felipe Araújo Ramalho
Michell Lucena Dias

Seção 1: Algumas Notas Históricas

Questões envolvendo a natureza transcendental dos números fascinam os matemáticos desde meados do século XVIII, tornando-se uma área central da teoria dos números. “Ás vezes, essas teorias não resolviam um problema original, mas eles passavam a ser ferramentas básicas na investigação de outras questões” (FIGUEIREDO).

Os números algébricos são identificados com certa facilidade: racionais, somas e produtos de raízes de números racionais e a unidade imaginária i são exemplos, mas o que tornou esse estudo tão misterioso e desafiador era a incapacidade de exibir exemplos ou algum tipo de classificação para os números transcendentes.

Em 1874, George Cantor (1845-1918) provou que o conjunto dos números algébricos é enumerável, o que foi surpreendente: a enumerabilidade deste conjunto implicaria a existência de uma “quantidade” infinitamente maior de transcendentes do que algébricos, muito embora se conhecessem pouquíssimos exemplos. Consoante a Marques (2013), “esta teoria vive um grande paradoxo, se quase todos os números são transcendentes, porque demonstrar a transcendência de um número é, em geral, uma tarefa tão complicada”?


Joseph Liouville

Grandes matemáticos deram suas contribuições a esta linha de pesquisa, como Cantor, Hilbert e Euler, mas o primeiro número a ter sua transcendência demonstrada foi dado em 1851 pelas mãos do francês Joseph Liouville (1809-1882):

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}1100010000000000000000010000\ldots$$

passou a ser chamado de *constante de Liouville*[1] em sua homenagem. (Na próxima seção, daremos uma demonstração desse importante resultado.)

Em 1873 que Charles Hermite (1822-1901) provou que e é transcendente. Hermite escreveu:

[1] Com o avanço dos métodos computacionais, contatou-se que por uma margem de erro extremamente pequena, o número de Liouville não satisfaz $10x^6 - 76x^3 - 190x + 21 = 0$ (ver [2]).

"Não me atrevo a tentar mostrar que pi é transcendente. Se outros o fizerem, ninguém ficará mais feliz que eu com o seu sucesso, mas acredite-me, caro amigo, isso não vai deixar de lhes custar algum esforço" [1].

Aproximadamente uma década após esta célebre constatação, o alemão Ferdinand von Lindemann (1852-1939) publicou uma bela e "simples" demonstração que π era transcendente.

Alexander Gelfond, em 1934, e Theodor Schneider, em 1935, resolveram independentemente o famoso 7º problema de Hilbert proposto em 1900 sobre a transcendência de números como $2^{\sqrt{2}}$. O teorema de Gelfond-Schneider – como ficou conhecido -, definiu a natureza algébrica da potenciação de números, estabelecendo uma larga classe de números transcendentes. O teorema afirma que se α e β são números algébricos, com $\alpha \neq 0{,}1$ e β complexo não racional, então α^{β} é transcendente. (Como leitura complementar, recomendamos a referência [6], na qual são apresentadas uma demonstração deste importante resultado e algumas consequências.)

É válido destacar que se tirássemos as hipóteses sobre α, o teorema pode perder sua validade. De fato, por um lado $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é transcendente, mas, por outro lado,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$$

que é algébrico. Também do teorema de Gelfond-Schneider segue que

$$e^{\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i} = 23{,}14069263\,...$$

é transcendente, chamado de *constante de Gelfond.*

Outros transcendentes curiosos e famosos são:

- O *número de Morse-Thue*: 0,0110101001...
- A *constante de Champernowne* $0{,}12345678910111213\,14\,...$ tem a interessante propriedade de conter em sua expansão decimal qualquer número que imaginarmos. A prova da sua transcendência pode ser encontrada em [5];
- $e^{\sqrt{\pi}}$.
- $\ln 2$.

Para finalizar, observamos que existe ainda uma série de números em que não se conhecem nada acerca de sua natureza. Dentre eles, $e+\pi, e\pi, \pi^{e}, 2^{e}, 2^{\pi}$.

Seção 2: O Número de Liouville

Na seção anterior realizamos um apanhamento histórico sobre o desenvolvimento da teoria dos números transcendentes, e enfatizamos que Hilbert foi um dos precursores deste estudo. Na verdade, Hilbert "construiu" um número transcendente e que, posteriormente, deu origem a uma *classe* de números transcendentes. Nesta seção, ancorados em [4], daremos uma demonstração deste fato.

Definição*. Diz-se que um número algébrico α é de grau n se ele for raiz de uma equação plinomial de grau n, e não existir uma equação desse tipo, de grau menor, da qual α seja raiz.*

Teorema 1. *Seja α um número algébrico de grau n. Então existe uma constante $A > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Aq^n} \qquad (1)$$

para todo racional $\frac{p}{q}$ com $q > 0$.

Demonstração: Por hipótese, α é raiz de uma equação polinomial da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde os coeficientes $a_i, i = 0,1,\dots,n$ são inteiros e $a_n \neq 0$. Nessas condições, podemos tomar $d > 0$, tal que, no intervalo $(\alpha - d, \alpha + d)$, a única raiz de $f(x)$ seja $x = \alpha$ – a saber, d pode ser qualquer número menor que a menor das distâncias de α às demais raízes reais de f.

Observemos agora que a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é limitada em qualquer intervalo finito e, portanto, podemos tomar $M > 0$ tal que

$$|f'(x)| < M, \qquad \forall\, x \in (\alpha - d, \alpha + d).$$

Para qualquer racional $\frac{p}{q}$ em $(\alpha - d, \alpha + d)$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio e obter

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\alpha - \frac{p}{q}\right) f(\xi)$$

onde $\xi \in (\alpha - d, \alpha + d)$. Ora, $f(\alpha) = 0$; daí

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right| |f(\xi)| < M \left|\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right| \qquad (2)$$

Buscaremos agora uma estimativa inferior para $f\left(\frac{p}{q}\right)$. Note que

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{q^n}\right| \geq \frac{1}{q^n}. \qquad (3)$$

De (2) e (3) obtemos a desigualdade

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n}$$

que vale para todo $\frac{p}{q} \in (\alpha - d, \alpha + d)$. Se $\frac{p}{q}$ não pertencer a este intervalo, então teremos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq d.$$

Como $q > 1$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{d}{q^n}.$$

Tomando $\frac{1}{A} = \min\{\frac{1}{m}, d\}$, temos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Aq^n}.$$

***Definição**: Um número real α é chamado um número de Liouville se existir uma sucessão $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}$, $q_j > 0$, $mdc(p_j, q_j) = 1$, com todos os elementos diferentes, e tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Lembre que o número apresentado por Liouville foi $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ (ver exemplo 5.1 de [4]).

***Teorema 2.** Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração: Suponha por contradição, que um certo número de Liouville seja algébrico, digamos de grau n. Então , pelo Teorema 1, a desigualdade (1) seria válida para todos os racionais; em particular para os $\frac{p_j}{q_j}$ da Definição 3. Daí

$$\frac{1}{Aq^n} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^j},$$

de onde teríamos que

$$q^{j-n} < A. \qquad (4)$$

Ora, por hipótese,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^j} < 1$$

pois $q \geq 1$. Daí, podemos concluir que $q_j \to +\infty$. Segue que a desigualdade (4) não pode ser verificada para *j* suficientemente grande. O absurdo provém da suposição de que há um número de Liouville que seja algébrico. Com isso demonstramos o resultado pretendido.

Bibliografia

[1] http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/categori.htm, acessado em 30/11/2012.

[2] http://mathworld.wolfram.com/LiouvillesConstant.html, acessado em 30/11/2012.

[3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[4] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM (Coleção de Iniciação Científica), 2011.

[5] NARLI, S. OZCELIK. *A new proof of Champernowne's number is transcendental*. International Journal of Engineeiring and Aplieed Sciences, 2009.

[6] MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcendentes*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.