Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

VII Semana da Matemática
10 anos do PPGMAT

A DEMONSTRAÇÃO DA IRRACIONALIDADE DE ALGUNS BELOS NÚMEROS: UMA CONTRIBUIÇÃO AOS EXEMPLOS DE NÚMEROS IRRACIONAIS

CAVALCANTE, Felipe Barbosa (Bolsista PET); CUNHA, Arthur Cavalcante (Bolsista PET); MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de (Tutor PET)
Universidade Federal de Campina Grande
felipeb@dme.ufcg.edu.br; arthur@dme.ufcg.edu.br, daniel@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Na construção do conjunto dos Números Reais, uma das passagens de maior impacto foi o surgimento dos números irracionais. Acredita-se que um dos primeiros números irracionais a aparecer na história da Matemática tenha sido o número √2, fato descoberto por Hipaso de Metaponto (c.500 a.C.), para desespero de toda ordem pitagórica a qual pertencia. Os alunos são apresentados a esses números desde o Ensino Médio e, mesmo assim, em livros didáticos, os exemplos conhecidos de números irracionais se limitam aos números π, e e a algumas raízes de números inteiros. Se os números irracionais são "tantos" e "estão por toda parte da reta", por que a diversidade de exemplos é tão pouca?

OBJETIVOS

Nosso objetivo nesse trabalho é propiciar aos professores e alunos que conheçam uma maior variedade de números irracionais, além dos que, geralmente, são exemplificados em livros didáticos e usados comumente.

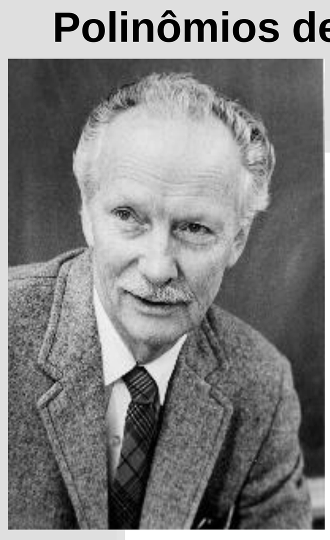
METODOLOGIA

O desenvolvimento desse trabalho, que faz parte das atividades do Programa de Educação Tutorial (PET), sob tutoria do professor Daniel Cordeiro de Morais Filho, do curso de Matemática da UFCG, se deu por meio de exposições durante o mês de agosto de 2013, com base em leituras de artigos e revisões bibliográficas.

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho, provaremos que alguns números, tais como $e^{p/q}$ com $p/q \in \mathbb{Q}$, $\log_a b$, onde a e b são números inteiros positivos tais que a ou b tem um fator primo que não aparece na fatoração do outro e e^{π}, são irracionais.

Polinômios de Niven



Ivan Niven (1915 – 1999) (foto), foi um matemático americano, que trabalhou e deixou importantes colaborações no estudo da Teoria dos Números.

Um polinômio de Niven é um polinômio da forma

$$P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{2n} c_k x^k \text{, com } c_k \text{ inteiro, } n \le k \le 2n.$$

Algumas propriedades facilmente verificáveis desse polinômio são:

i. $0 < P_n(x) < \frac{1}{n!}$, para $(0 < x < 1)$;
ii. $P_n(0) = 0$;
iii. ${P_n}^{(m)}(0) = 0$, para $m < n$ ou $m > 2n)$ (essa notação representa a m-ésima derivada do polinômio P_n);
iv. $P_n^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m$, para $n \le m \le 2n$.

Segue imediatamente dessas propriedades que P_n e suas derivadas assumem valores inteiros em $x = 0$. Observe ainda que $P_n(x) = P_n(1-x)$ e, portanto, concluímos que P_n e suas derivadas também assumem valores inteiros em $x = 1$. $(*)$

Teorema 1: Seja a um número inteiro. Se $a > 0$, então e^a é um número irracional.

Suponhamos, por contradição, que e^a seja um número racional, isto é, $e^a = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros positivos relativamente primos. Considerando a função

$$I(x) = a^{2n}P_n(x) - a^{2n-1}{P_n}'(x) + \cdots - a{P_n}^{(2n-1)}(x) + {P_n}^{(2n)}(x)$$

por$(*)$, segue que $I(0)$ e $I(1)$ assumem valores inteiros.

Por outro lado, por diferenciação, temos

$$q(e^{ax}I(x))' = qe^{ax}\big(aI(x) + I'(x)\big) = qe^{ax}a^{2n+1}P_n(x),$$

donde

$$qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx = q(e^{ax}I(x))|_0^1 = q(e^aI(1) - I(0)) = pI(1) - qI(0)$$

e assim, esta integral é um inteiro não-nulo. $(**)$

De $i.$, verifica-se

$$0 < qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx < \frac{qa^{2n}(e^a-1)}{n!}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{qa^{2n}(e^a-1)}{n!} = 0$, então para n suficientemente grande, devemos ter

$$\frac{qa^{2n}(e^a-1)}{n!} < 1.$$

Logo, para esse n suficientemente grande, temos

$$0 < qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx < 1$$

Uma contradição, visto que por $(**)$, $qa^{2n+1}\int_0^1 e^{ax}P_n(x)dx$ é um número inteiro.

Corolário : seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então $e^{a/b}$ é um número irracional.

Exemplos de números irracionais, obtidos a partir desse corolário são: $\sqrt{e}$, $\frac{1}{e^{13}}$, $\sqrt[9]{e^{11}}$

Teorema 2: Sejam a e b números inteiros positivos, com $b \neq 1$. Então, $\log_a b$ é irracional, sempre que na fatoração de a ou de b aparecer um fator primo que não está presente na fatoração do outro.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que na fatoração de a exista um fator primo que não esteja na fatoração de b. Do *Teorema Fundamental da Aritmética*, podemos considerar as decomposições em fatores primos dos números a e b e escrever $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ e $b = q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\dots q_l^{\beta_l}$, onde p_i e q_j são números primos e α_i e β_j são números naturais, com algum $p_{i_0} \neq q_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, l$. Suponhamos agora, por absurdo, que $\log_a b$ seja racional, isto é, $\log_a b = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros relativamente primos. Assim, teríamos $a^p = b^q$, absurdo, pois p_{i_o} aparece na decomposição de a^p, mas não está presente na decomposição de b^q, contrariando a unicidade dos fatores primos de um número, que é garantida pelo *Teorema Fundamental da Aritmética*.

Teorema 3: e^{π} é um número irracional.

Para a demonstração deste teorema devemos considerar os seguintes teoremas:

Teorema de Gelfond-Schneider: Sejam α um número algébrico (diferente de zero ou um) e β um número algébrico não racional. Então, o número α^{β} é transcendente.

Lema: Todo número transcendente é irracional.

Assim, pela relação de Euler, temos $e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = -1$, donde $e^{\pi} = (-1)^{-i}$. Portanto, pelo teorema de Gelfond-Schneider e pelo lema, concluímos que e^{π} é irracional.

Outros exemplos de números irracionais pelo Teorema de Gelfond-Schneider são $2^{\sqrt{2}}$ e $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

REFERÊNCIAS

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*. Brasília: SBM, 1980. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.
GOURDON, X.; SEBAH, P. *Irrationality Proofs*. Disponível em <http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html>. Acesso em: 05/08/2013.
LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. vol.1. Projeto Euclides.
MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcendentes*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.