UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

TUTOR: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

BOLSISTA: Tiago Alves de Sousa

ANÁLISE DA ABORDAGEM DO TEMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA EM UM LIVRO DIDÁTICO

CAMPINA GRANDE - PB

Novembro de 2014

Apresentação

O livro didático pode ser visto como uma importante ferramenta auxiliar do professor que busca ensinar matemática de modo mais significativo para o aluno. Em muitos casos, o livro é a única fonte que o professor dispõe e usa para preparar suas aulas. De antemão ressaltamos que acreditamos na autonomia do professor, cuja prática docente não deve ser limitada pelo livro didático, o qual tem o papel de indicar caminhos, respeitando a proposta pedagógica da escola e do professor.

No entanto, para que o livro didático seja um auxiliar confiável, é necessário que os conceitos matemáticos expostos sejam apresentados com precisão, as propriedades referentes a cada conteúdo sejam justificadas e aplicadas a exercícios e situações-problema, que os conteúdos estejam integrados e os conhecimentos matemáticos possam ser aplicados em situações cotidianas ou usados em outras áreas do saber. Todas essas características tão necessárias que um livro deve possuir permiti consolidar e aprofundar o conhecimento já adquirido no ensino fundamental, tornando a aprendizagem significativa.

Neste trabalho, apresentaremos uma análise crítica do conteúdo progressão aritmética em um livro didático de matemática do ensino médio, focalizando nossa análise na clareza da exposição do assunto, na conceituação, na conexão entre os temas tratados e na adequação dos exemplos e exercícios.

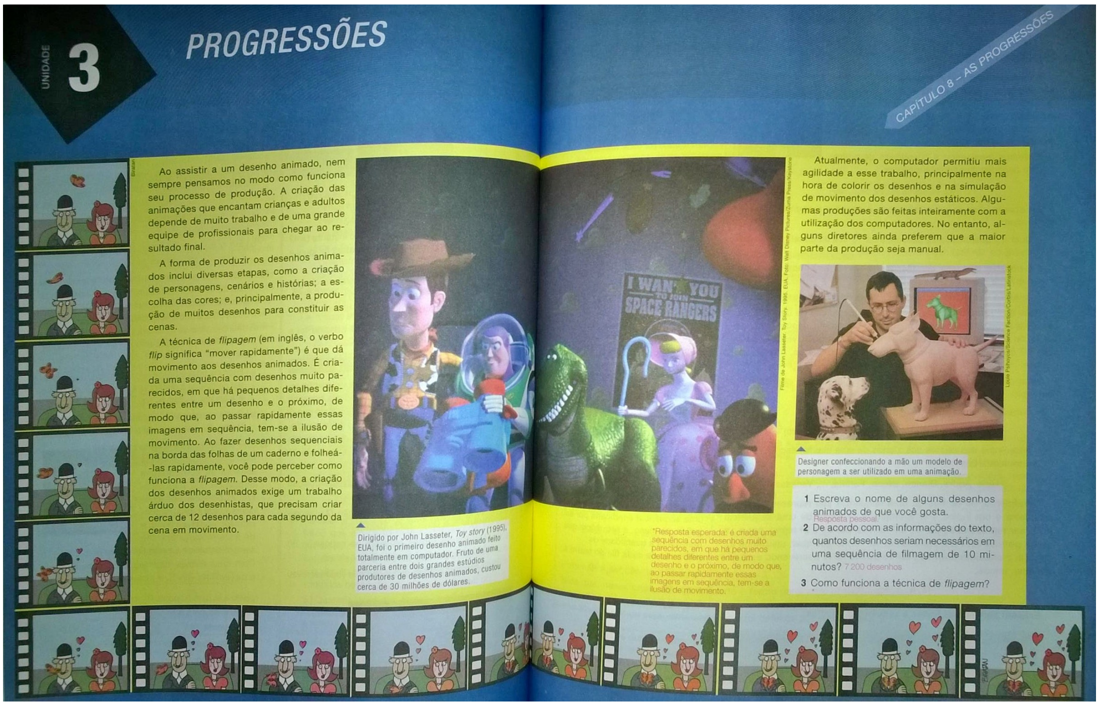
No geral, analisaremos a estrutura que o autor apresenta todo o conteúdo, assim como os exercícios propostos. Dividiremos esta análise em 3 capítulos: conteúdo, exercícios propostos e conclusão. Para realizar esta análise usamos como base teórica as referências [1], [2], [3], [4] e [6].

Capítulo 1

Conteúdo

1.1 Páginas de abertura da unidade

No início da unidade do livro analisado há duas páginas na qual o autor apresenta adequadamente, de maneira contextualizada, um assunto pelo qual ele relaciona aos conteúdos que serão tratados ao longo do capítulo do livro. Nessas páginas há informações que se referem a outras áreas do conhecimento, apresentadas coerentemente por meio de textos e imagens, conforme mostra a Figura 1.1:


UNIDADE 3

PROGRESSÕES

CAPÍTULO 8 – AS PROGRESSÕES

Ao assistir a um desenho animado, nem sempre pensamos no modo como funciona seu processo de produção. A criação das animações que encantam crianças e adultos depende de muito trabalho e de uma grande equipe de profissionais para chegar ao resultado final.

A forma de produzir os desenhos animados inclui diversas etapas, como a criação de personagens, cenários e histórias; a escolha das cores; e, principalmente, a produção de muitos desenhos para constituir as cenas.

A técnica de *flipagem* (em inglês, o verbo *flip* significa "mover rapidamente") é que dá movimento aos desenhos animados. É criada uma sequência com desenhos muito parecidos, em que há pequenos detalhes diferentes entre um desenho e o próximo, de modo que, ao passar rapidamente essas imagens em sequência, tem-se a ilusão de movimento. Ao fazer desenhos sequenciais na borda das folhas de um caderno e folheá-las rapidamente, você pode perceber como funciona a *flipagem*. Desse modo, a criação dos desenhos animados exige um trabalho árduo dos desenhistas, que precisam criar cerca de 12 desenhos para cada segundo da cena em movimento.

Dirigido por John Lasseter, *Toy story* (1995), EUA, foi o primeiro desenho animado feito totalmente em computador. Fruto de uma parceria entre dois grandes estúdios produtores de desenhos animados, custou cerca de 30 milhões de dólares.

*Resposta esperada: é criada uma sequência com desenhos muito parecidos, em que há pequenos detalhes diferentes entre um desenho e o próximo, de modo que, ao passar rapidamente essas imagens em sequência, tem-se a ilusão de movimento.

Atualmente, o computador permitiu mais agilidade a esse trabalho, principalmente na hora de colorir os desenhos e na simulação de movimento dos desenhos estáticos. Algumas produções são feitas inteiramente com a utilização dos computadores. No entanto, alguns diretores ainda preferem que a maior parte da produção seja manual.

Designer confeccionando a mão um modelo de personagem a ser utilizado em uma animação.

1 Escreva o nome de alguns desenhos animados de que você gosta. Resposta pessoal.

2 De acordo com as informações do texto, quantos desenhos seriam necessários em uma sequência de filmagem de 10 minutos? 7 200 desenhos

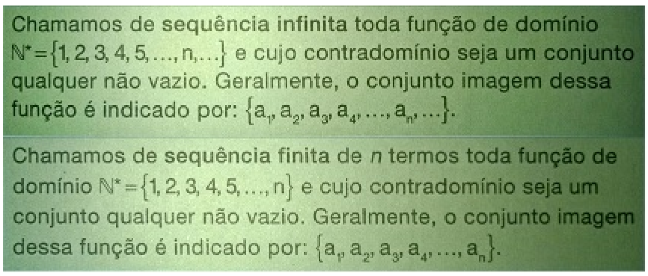
3 Como funciona a técnica de *flipagem*?

Figura 1.1: Abertura da unidade.

Na abertura da unidade o autor acertadamente traça uma relação entre a ideia de sequência, presente na produção de alguns desenhos animados, e as sequências numéricas, que serão estudadas ao longo da unidade. Nos desenhos animados, uma imagem estática sempre depende da(s) anterior(es) para que, na flipagem, se tenha a ilusão de movimento e isso também acontece nas sequências numéricas, que seguem uma lei de recorrência.
É sempre importante introduzir um conteúdo dessa forma proposta pelo autor, pois relembra os conhecimentos prévios do aluno, como também estabelece intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos.

1.2 Formalização da definição de sequência

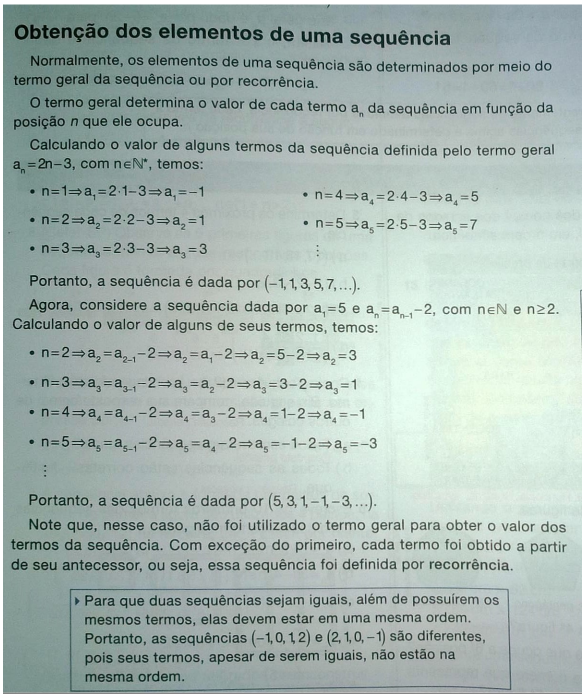
Corretamente o autor define sequência como uma função com domínio nos naturais e mostra que sequências podem ser descritas de vários modos: por recorrência, através da expressão de seu termo geral e por meio de propriedades que caracterizam os termos da sequência e sua ordenação, ver respectivamente Figuras 1.2 e 1.3:



Chamamos de sequência infinita toda função de domínio $\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$ e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Geralmente, o conjunto imagem dessa função é indicado por: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Chamamos de sequência finita de *n* termos toda função de domínio $\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$ e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Geralmente, o conjunto imagem dessa função é indicado por: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\}$.

Figura 1.2: Definição de sequência.



Obtenção dos elementos de uma sequência

Normalmente, os elementos de uma sequência são determinados por meio do termo geral da sequência ou por recorrência.

O termo geral determina o valor de cada termo a_n da sequência em função da posição *n* que ele ocupa.

Calculando o valor de alguns termos da sequência definida pelo termo geral $a_n=2n-3$, com $n\in\mathbb{N}^*$, temos:

- $n=1\Rightarrow a_1=2\cdot1-3\Rightarrow a_1=-1$
- $n=2\Rightarrow a_2=2\cdot2-3\Rightarrow a_2=1$
- $n=3\Rightarrow a_3=2\cdot3-3\Rightarrow a_3=3$
- $n=4\Rightarrow a_4=2\cdot4-3\Rightarrow a_4=5$
- $n=5\Rightarrow a_5=2\cdot5-3\Rightarrow a_5=7$

$\vdots$

Portanto, a sequência é dada por $(-1, 1, 3, 5, 7, \ldots)$.

Agora, considere a sequência dada por $a_1=5$ e $a_n=a_{n-1}-2$, com $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq2$. Calculando o valor de alguns de seus termos, temos:

- $n=2\Rightarrow a_2=a_{2-1}-2\Rightarrow a_2=a_1-2\Rightarrow a_2=5-2\Rightarrow a_2=3$
- $n=3\Rightarrow a_3=a_{3-1}-2\Rightarrow a_3=a_2-2\Rightarrow a_3=3-2\Rightarrow a_3=1$
- $n=4\Rightarrow a_4=a_{4-1}-2\Rightarrow a_4=a_3-2\Rightarrow a_4=1-2\Rightarrow a_4=-1$
- $n=5\Rightarrow a_5=a_{5-1}-2\Rightarrow a_5=a_4-2\Rightarrow a_5=-1-2\Rightarrow a_5=-3$

$\vdots$

Portanto, a sequência é dada por $(5, 3, 1, -1, -3, \ldots)$.

Note que, nesse caso, não foi utilizado o termo geral para obter o valor dos termos da sequência. Com exceção do primeiro, cada termo foi obtido a partir de seu antecessor, ou seja, essa sequência foi definida por recorrência.

Para que duas sequências sejam iguais, além de possuírem os mesmos termos, elas devem estar em uma mesma ordem. Portanto, as sequências $(-1, 0, 1, 2)$ e $(2, 1, 0, -1)$ são diferentes, pois seus termos, apesar de serem iguais, não estão na mesma ordem.

Figura 1.3: Termos de uma sequência.

Verificamos até com certa surpresa a ausência da classificação das sequências, em nenhum momento é apresentado para o leitor a noção de sequência crescente e decrescente. Observe que uma maneira simples na qual o autor poderia apresentar esses conceitos seria:

Definição 1.1. *Seja* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência. Dizemos que* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é crescente se*

$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ...$$

isto é, se $a_n < a_{n+1}$.
Agora se,

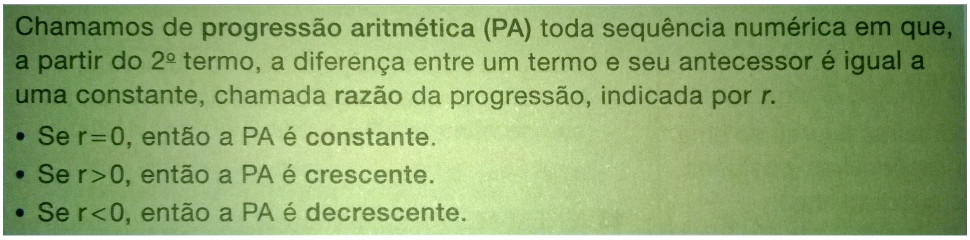
$$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$$

isto é, se $a_n > a_{n+1}$ *dizemos que a sequência é decrescente.*

Veja que os conceitos acima citados são simples, porém ignorados pelo autor.

1.3 Apresentação e definição da Progressão Aritmética

Constatamos que a definição de progressão aritmética (PA) está correta e adequada, uma vez que, o autor, conforme mostra a Figura 1.4, a define como uma sucessão na qual a diferença entre dois termos sucessivos quaisquer é constante:

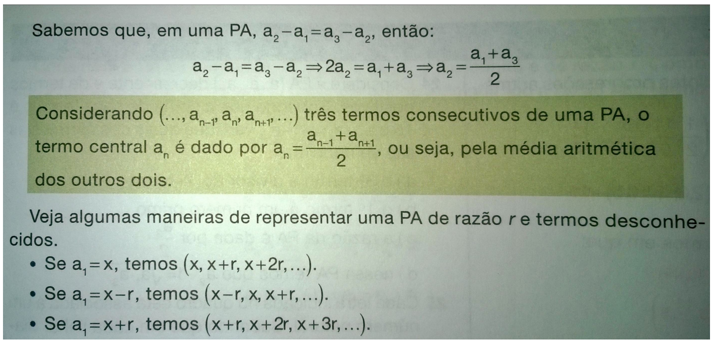


Chamamos de progressão aritmética (PA) toda sequência numérica em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo e seu antecessor é igual a uma constante, chamada razão da progressão, indicada por *r*.

- Se r=0, então a PA é constante.
- Se r>0, então a PA é crescente.
- Se r<0, então a PA é decrescente.

Figura 1.4: Definição de PA.

Posteriormente o autor mostra que dado três termos consecutivos de uma PA, o termo central é obtido pela média aritmética dos outros dois, a maneira que ele utilizou para apresentar esse fato foi simples, correta e objetiva. Citou ainda algumas representações especiais de uma PA quando os seus termos são desconhecidos, vide Figura 1.5:



Sabemos que, em uma PA, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, então:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow 2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

Considerando $(\ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ três termos consecutivos de uma PA, o termo central a_n é dado por $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, ou seja, pela média aritmética dos outros dois.

Veja algumas maneiras de representar uma PA de razão *r* e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x, x+r, x+2r, \ldots)$.
- Se $a_1 = x-r$, temos $(x-r, x, x+r, \ldots)$.
- Se $a_1 = x+r$, temos $(x+r, x+2r, x+3r, \ldots)$.

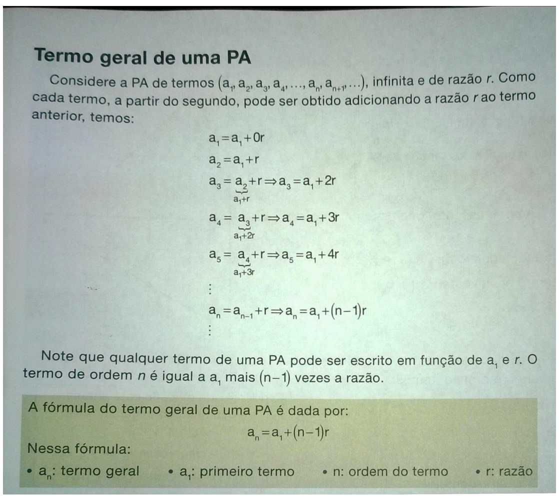
Figura 1.5: Representação dos termos de uma PA.

Chamamos a atenção para o fato de que as definições de PA crescente e decrescente ($r > 0$ ou $r < 0$) dadas pelo autor na Figura 1.4, embora corretas, não se adaptam ao caso geral de uma sequência, o sinal de r é apenas uma consequência. Seria mais interessante dizer simplesmente $a_n < a_{n+1}$ e $a_n > a_{n+1}$, como fizemos antes na página 5, definição 1.1.

Com relação às representações especiais de uma PA, a vantagem delas é diminuir a quantidade de cálculos exigidos em algumas situações-problema e foi importante o autor citá-las. Para maiores informações consulte as referências [1] e [4].

1.4 Cálculo da expressão matemática do termo geral de uma PA

O autor cuidadosamente faz a demonstração da expressão que define o termo geral de uma progressão aritmética:



Termo geral de uma PA

Considere a PA de termos $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, infinita e de razão *r*. Como cada termo, a partir do segundo, pode ser obtido adicionando a razão *r* ao termo anterior, temos:

$$a_1 = a_1 + 0r$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1+r} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1+2r} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1+3r} + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$\vdots$$

Note que qualquer termo de uma PA pode ser escrito em função de a_1 e *r*. O termo de ordem *n* é igual a a_1 mais $(n-1)$ vezes a razão.

A fórmula do termo geral de uma PA é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Nessa fórmula:

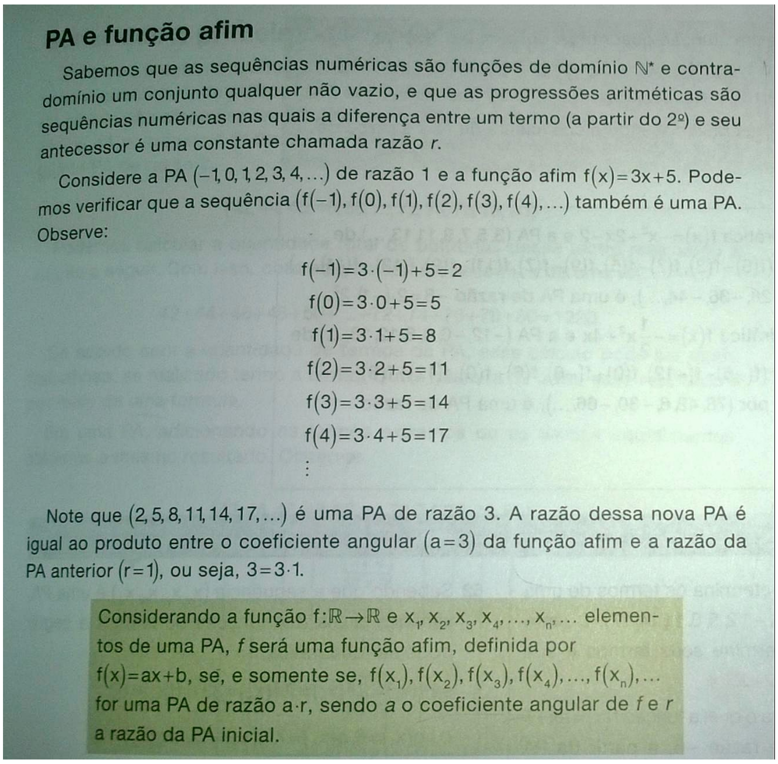
- a_n: termo geral
- a_1: primeiro termo
- n: ordem do termo
- r: razão

Figura 1.6: Expressão do termo geral de uma PA.

Destacamos que a introdução de demonstrações conforme foi feita pelo autor, que deu um bom exemplo, é essencial para o aluno ir se familiarizando com a maneira específica da argumentação matemática. O leitor mais curioso sobre as principais técnicas de demonstração e como aplicá-las pode consultar [3].

1.5 Conexão entre PA e função afim

Objetivando fazer a conexão entre PA e função afim, o autor acertadamente resgata a definição de sequência e PA:



PA e função afim

Sabemos que as sequências numéricas são funções de domínio $\mathbb{N}^*$ e contradomínio um conjunto qualquer não vazio, e que as progressões aritméticas são sequências numéricas nas quais a diferença entre um termo (a partir do 2º) e seu antecessor é uma constante chamada razão *r*.

Considere a PA $(-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ de razão 1 e a função afim $f(x) = 3x + 5$. Podemos verificar que a sequência $(f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots)$ também é uma PA. Observe:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \cdot (-1) + 5 = 2 \\ f(0) &= 3 \cdot 0 + 5 = 5 \\ f(1) &= 3 \cdot 1 + 5 = 8 \\ f(2) &= 3 \cdot 2 + 5 = 11 \\ f(3) &= 3 \cdot 3 + 5 = 14 \\ f(4) &= 3 \cdot 4 + 5 = 17 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que $(2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots)$ é uma PA de razão 3. A razão dessa nova PA é igual ao produto entre o coeficiente angular $(a = 3)$ da função afim e a razão da PA anterior $(r = 1)$, ou seja, $3 = 3 \cdot 1$.

Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ elementos de uma PA, *f* será uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, se, e somente se, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots$ for uma PA de razão $a \cdot r$, sendo *a* o coeficiente angular de *f* e *r* a razão da PA inicial.

Figura 1.7: Relação entre PA e função afim.

Elogiamos a atitude do autor em fazer essa conexão, que não está presente em boa parte dos livros didáticos do ensino médio. Mas ao tentar definir essa relação ele comente um equívoco, que é o de afirmar que uma função afim possui coeficiente angular, como mostra a Figura 1.7. Perceba que numa função afim

$$f(x) = ax + b,$$

o número a é chamado taxa de variação e não é adequado chamá-lo de coeficiente angular, pois uma função não tem ângulo. Chama-se taxa de variação porque acréscimos iguais dados a x

correspondem acréscimos iguais dados a $f(x)$.

Em nossa opinião, a definição feita pelo autor na Figura 1.7 está confusa, uma vez que, dada uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ existe uma única função afim

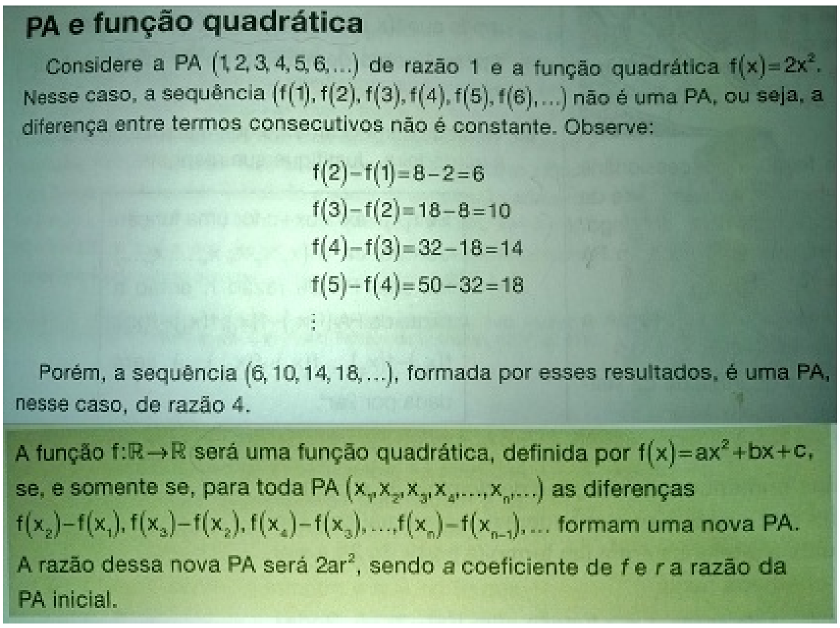
$$f(x) = ax + b,$$

tal que $a_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, dada a função afim $f(x) = ax + b$, seus valores $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ..., $a_n = f(n), ...$, formam uma progressão aritmética (LIMA, et al. 2006), vide [5].

1.6 Conexão entre PA e função quadrática

Seguindo a mesma lógica feita anteriormente, o autor procura mostrar a conexão entre PA e função quadrática, coisas que outros não se preocupam em fazer:



PA e função quadrática

Considere a PA $(1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)$ de razão 1 e a função quadrática $f(x)=2x^2$. Nesse caso, a sequência $(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), ...)$ não é uma PA, ou seja, a diferença entre termos consecutivos não é constante. Observe:

$$f(2)-f(1)=8-2=6$$
$$f(3)-f(2)=18-8=10$$
$$f(4)-f(3)=32-18=14$$
$$f(5)-f(4)=50-32=18$$
$$\vdots$$

Porém, a sequência $(6, 10, 14, 18, ...)$, formada por esses resultados, é uma PA, nesse caso, de razão 4.

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ será uma função quadrática, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, se, e somente se, para toda PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...)$ as diferenças $f(x_2)-f(x_1), f(x_3)-f(x_2), f(x_4)-f(x_3), ..., f(x_n)-f(x_{n-1}), ...$ formam uma nova PA. A razão dessa nova PA será $2ar^2$, sendo a coeficiente de f e r a razão da PA inicial.

Figura 1.8: Relação entre PA e função quadrática.

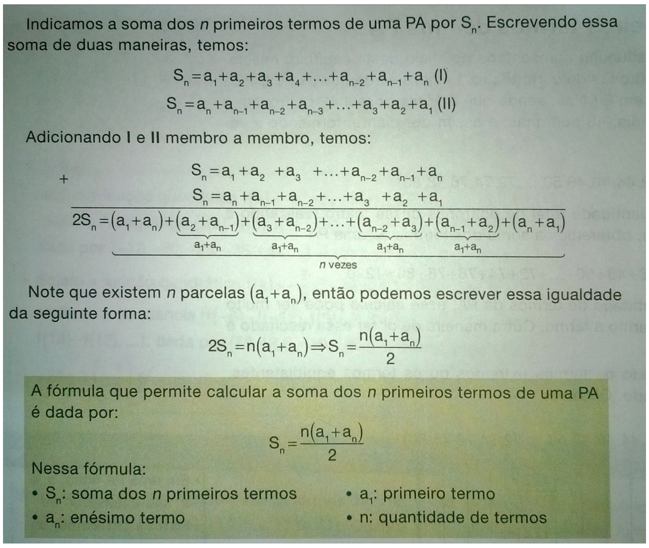
Identificamos que a forma como foi feita essa conexão não ficou clara, pois o autor não constrói a relação, pelo contrário, ele já começa citando uma função quadrática e a partir dos termos de uma PA aplicados nessa função estabelece a relação, ver Figura 1.8.

Ao nosso ver esse não seria o momento adequado para estabelecer essa relação, na próxima seção abordaremos essa situação mais detalhadamente.

1.7 Formalização da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA

O autor sabiamente inicia a seção resgatando o exemplo introdutório do capítulo do livro analisado, além do mais, conecta os temas apresentados em diferentes partes do livro, isso é importante, pois liga o conceito de PA com a soma dos seus termos e ajuda o aluno a compreender a construção da expressão geral da soma S_n.

A soma dos termos de uma progressão aritmética é apresentada motivada através da bem conhecida história de sua descoberta por Gauss[1], e sua demonstração é feita corretamente, de maneira clara e objetiva:



Indicamos a soma dos *n* primeiros termos de uma PA por S_n. Escrevendo essa soma de duas maneiras, temos:

$$S_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \quad \text{(I)}$$
$$S_n = a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+\ldots+a_3+a_2+a_1 \quad \text{(II)}$$

Adicionando I e II membro a membro, temos:

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \\ + & S_n = a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1 \\ \hline & 2S_n = \underbrace{\underbrace{(a_1+a_n)}_{a_1+a_n}+\underbrace{(a_2+a_{n-1})}_{a_1+a_n}+\underbrace{(a_3+a_{n-2})}_{a_1+a_n}+\ldots+\underbrace{(a_{n-2}+a_3)}_{a_1+a_n}+\underbrace{(a_{n-1}+a_2)}_{a_1+a_n}+(a_n+a_1)}_{n \text{ vezes}} \end{array}$$

Note que existem *n* parcelas (a_1+a_n), então podemos escrever essa igualdade da seguinte forma:

$$2S_n = n(a_1+a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

A fórmula que permite calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

Nessa fórmula:
- S_n: soma dos *n* primeiros termos
- a_1: primeiro termo
- a_n: enésimo termo
- n: quantidade de termos

Figura 1.9: Expressão que define a soma dos termos de uma PA.

Observe que a fórmula foi deduzida de maneira simples, onde destacamos a preocupação do autor em explicar cada passagem facilitando dessa forma o entendimento do aluno.
Verificamos que a expressão de S_n em função de n não é desenvolvida, assim o autor perde a oportunidade de estabelecer uma conexão concreta e indiscutível entre PA e função quadrática. Uma maneira elegante de mostrar esse elo seria desenvolver a expressão que define S_n, da seguinte forma:

[1]Johann Carl Friedrich Gauss (1977-1855) matemático, astrônomo e físico alemão, é considerado o maior matemático de todos os tempos e é conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos". Deu enormes contribuições à Álgebra, aos Números Complexos, à Teoria dos Números e a várias outras áreas da Matemática, da Astronomia e da Física.

$$S_n = \frac{(a_n + a_1)n}{2}. \tag{1.1}$$

Da figura 1.6, segue que

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \tag{1.2}$$

Então, para expressar S_n numa função quadrática de n basta substituir (1.2) em (1.1). Donde obtemos,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + (n-1)r + a_1)n}{2} \\ &= \frac{(2a_1 + nr - r)n}{2} \\ &= \frac{2a_1 n + rn^2 - rn}{2} \\ &= \frac{r}{2}n^2 + a_1 n - \frac{r}{2}n \\ &= \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n. \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{r}{2} = a$ e $\left(a_1 - \frac{r}{2}\right) = b$, temos

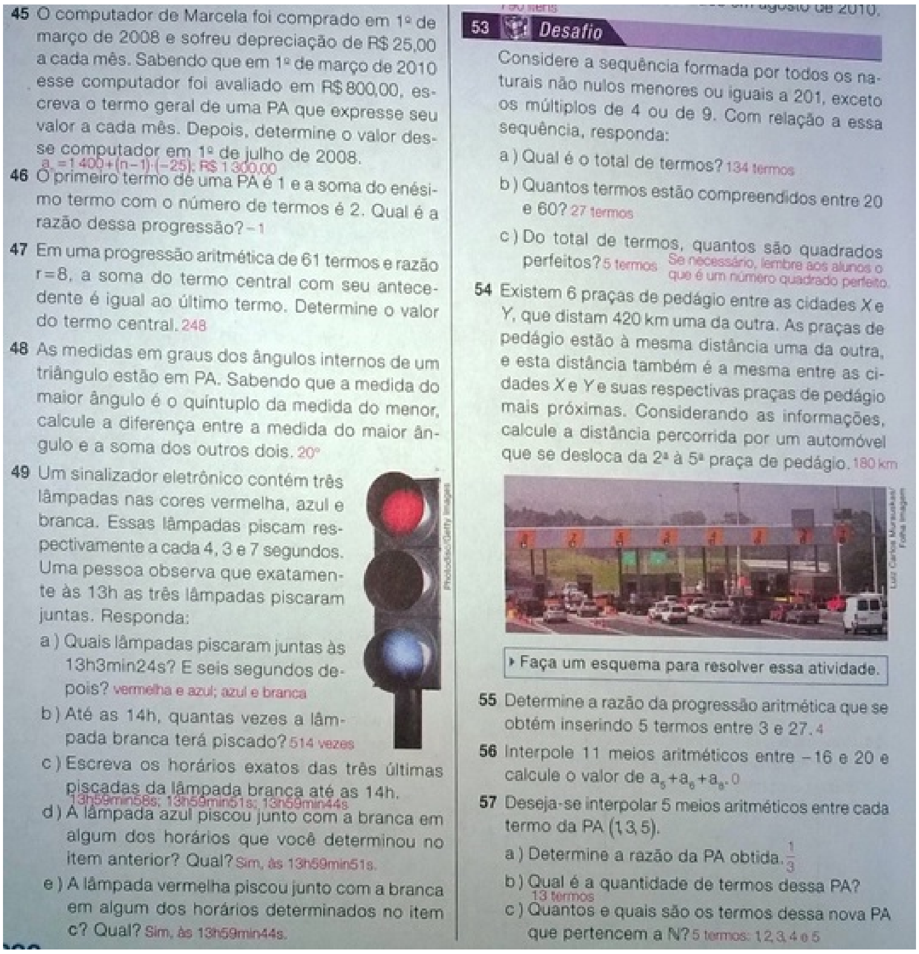
$$S_n = an^2 + bn. \tag{1.3}$$

Aqui sim, diferentemente do que o autor fez na parte em que conectou os temas PA e função quadrática, seção 1.6 deste trabalho, seria a melhor hora de estabelecer essa conexão. Perceba, que ao desenvolvermos a equação (1.1) conseguimos como mostra a equação (1.3) expressar S_n como uma função de n, deixando claro que se trata de uma função quadrática.

Capítulo 2

Exercícios Propostos

Os exercícios relacionados ao tema analisado estão dispostos em nível gradual de complexidade e buscam complementar a teoria abordada, fato interessante, pois além de permitir que o aluno revise o conteúdo estudado favorece para a construção do conhecimento:



45 O computador de Marcela foi comprado em 1º de março de 2008 e sofreu depreciação de R$ 25,00 a cada mês. Sabendo que em 1º de março de 2010 esse computador foi avaliado em R$ 800,00, escreva o termo geral de uma PA que expresse seu valor a cada mês. Depois, determine o valor desse computador em 1º de julho de 2008. $a_n = 1\,400 + (n-1)\cdot(-25)$; R$ 1 300,00

46 O primeiro termo de uma PA é 1 e a soma do enésimo termo com o número de termos é 2. Qual é a razão dessa progressão? -1

47 Em uma progressão aritmética de 61 termos e razão $r=8$, a soma do termo central com seu antecedente é igual ao último termo. Determine o valor do termo central. 248

48 As medidas em graus dos ângulos internos de um triângulo estão em PA. Sabendo que a medida do maior ângulo é o quíntuplo da medida do menor, calcule a diferença entre a medida do maior ângulo e a soma dos outros dois. 20°

49 Um sinalizador eletrônico contém três lâmpadas nas cores vermelha, azul e branca. Essas lâmpadas piscam respectivamente a cada 4, 3 e 7 segundos. Uma pessoa observa que exatamente às 13h as três lâmpadas piscaram juntas. Responda:

a) Quais lâmpadas piscaram juntas às 13h3min24s? E seis segundos depois? vermelha e azul; azul e branca

b) Até as 14h, quantas vezes a lâmpada branca terá piscado? 514 vezes

c) Escreva os horários exatos das três últimas piscadas da lâmpada branca até as 14h. 13h59min58s; 13h59min51s; 13h59min44s

d) A lâmpada azul piscou junto com a branca em algum dos horários que você determinou no item anterior? Qual? Sim, às 13h59min51s.

e) A lâmpada vermelha piscou junto com a branca em algum dos horários determinados no item c? Qual? Sim, às 13h59min44s.

53 Desafio

Considere a sequência formada por todos os naturais não nulos menores ou iguais a 201, exceto os múltiplos de 4 ou de 9. Com relação a essa sequência, responda:

a) Qual é o total de termos? 134 termos

b) Quantos termos estão compreendidos entre 20 e 60? 27 termos

c) Do total de termos, quantos são quadrados perfeitos? 5 termos Se necessário, lembre aos alunos o que é um número quadrado perfeito.

54 Existem 6 praças de pedágio entre as cidades X e Y, que distam 420 km uma da outra. As praças de pedágio estão à mesma distância uma da outra, e esta distância também é a mesma entre as cidades X e Y e suas respectivas praças de pedágio mais próximas. Considerando as informações, calcule a distância percorrida por um automóvel que se desloca da 2ª à 5ª praça de pedágio. 180 km

Faça um esquema para resolver essa atividade.

55 Determine a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 5 termos entre 3 e 27. 4

56 Interpole 11 meios aritméticos entre -16 e 20 e calcule o valor de $a_5 + a_6 + a_8$. 0

57 Deseja-se interpolar 5 meios aritméticos entre cada termo da PA (1, 3, 5).

a) Determine a razão da PA obtida. $\frac{1}{3}$

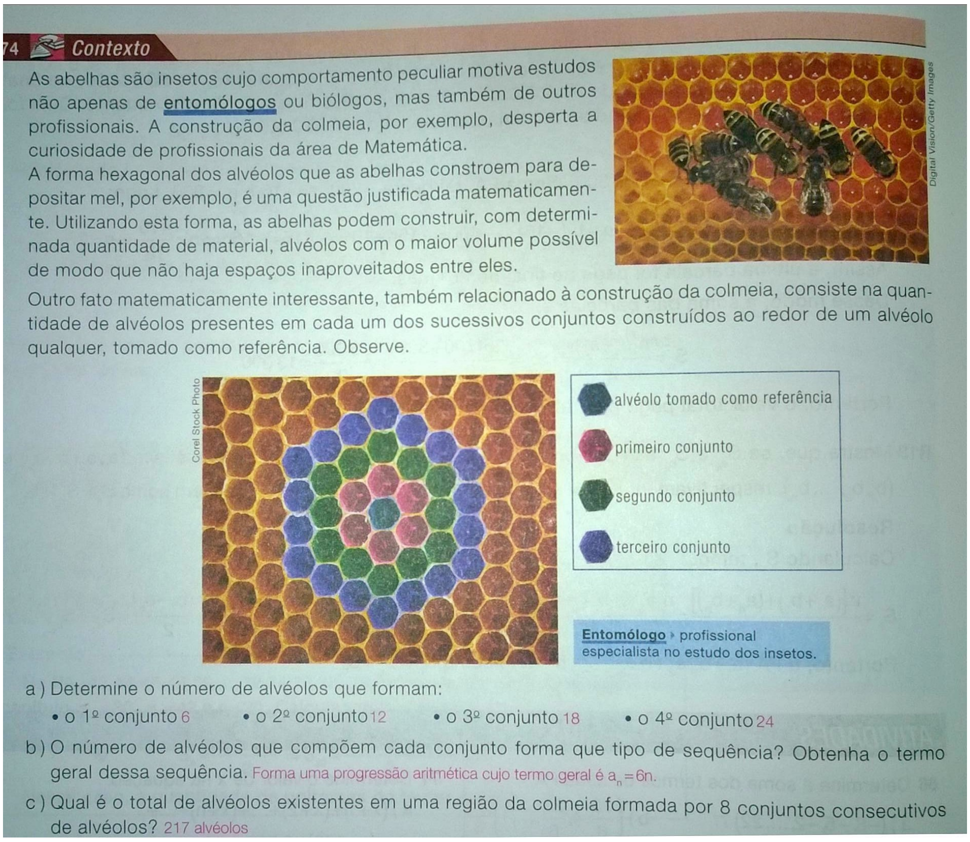
b) Qual é a quantidade de termos dessa PA? 13 termos

c) Quantos e quais são os termos dessa nova PA que pertencem a $\mathbb{N}$? 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5

Figura 2.1: Exercícios e desafios.

No final desses exercícios há uma seção de desafios, que são questões cuja resolução vai além da aplicação imediata do tema analisado. Concordamos com o autor em abordar questões desse tipo porque estimula a capacidade do aluno de sair da monotonia da aplicação imediata de fórmulas, possibilitando liberdade de construir suas próprias estratégias de resolução, pois tais questões possuem maior grau de complexidade.

Aliado aos exercícios tem sempre uma questão contextualizada, na qual mostra ao aluno que o conteúdo estudado apresenta aplicação prática em nossas vidas:


74 Contexto

As abelhas são insetos cujo comportamento peculiar motiva estudos não apenas de entomólogos ou biólogos, mas também de outros profissionais. A construção da colmeia, por exemplo, desperta a curiosidade de profissionais da área de Matemática.

A forma hexagonal dos alvéolos que as abelhas constroem para depositar mel, por exemplo, é uma questão justificada matematicamente. Utilizando esta forma, as abelhas podem construir, com determinada quantidade de material, alvéolos com o maior volume possível de modo que não haja espaços inaproveitados entre eles.

Digital Vision/Getty Images

Outro fato matematicamente interessante, também relacionado à construção da colmeia, consiste na quantidade de alvéolos presentes em cada um dos sucessivos conjuntos construídos ao redor de um alvéolo qualquer, tomado como referência. Observe.

Corel Stock Photo

alvéolo tomado como referência
primeiro conjunto
segundo conjunto
terceiro conjunto

Entomólogo › profissional especialista no estudo dos insetos.

a) Determine o número de alvéolos que formam:
- o 1º conjunto 6
- o 2º conjunto 12
- o 3º conjunto 18
- o 4º conjunto 24

b) O número de alvéolos que compõem cada conjunto forma que tipo de sequência? Obtenha o termo geral dessa sequência. Forma uma progressão aritmética cujo termo geral é $a_n = 6n$.

c) Qual é o total de alvéolos existentes em uma região da colmeia formada por 8 conjuntos consecutivos de alvéolos? 217 alvéolos

Figura 2.2: Exercício contextualizado.

Entendemos que exercícios corretamente e adequadamente contextualizados podem ser uma das maneiras de concretizar a matemática, de auxiliar o aluno na compreensão de conceitos matemáticos mais abstratos. Essa proposta do autor é importante, pois os exercícios se destacam como uma das principais formas de fixação e aplicação do conteúdo estudado.

Capítulo 3

Conclusão

O capítulo do livro analisado com base nos critérios estabelecidos na apresentação deste trabalho é bem estruturado, organizado e a linguagem é adequada. A apresentação da teoria, a escolha da introdução, dos exercícios e o estabelecimento gradual das definições e terminologia matemática facilita a compreensão do assunto pelo aluno. Percebemos que acertadamente no início da unidade o autor expõe situações adequadamente contextualizadas com o cotidiano, isso é importante, pois motiva o aluno para que entenda a construção dos conceitos que serão apresentados no capítulo.

Os exercícios propostos conforme mostra a Figura 2.1 contemplam uma grande variedade de problemas que complementam a teoria abordada e os exemplos apresentados; identificamos em alguns desses exercícios contextualização com situações reais e cotidianas, ver Figura 2.2. É importante ainda destacar que as verdades matemáticas não sendo definição nem postulado podem ser demonstradas, palavra essa que o autor não cita em nenhum momento.

Ressaltamos que, mesmo o autor não citando a palavra demonstração, ele realiza algumas no decorrer do tema analisado. Em geral, se um livro deixar de apresentar demonstrações, não é bom, pois dessa maneira deixa-se de ensinar como a matemática realmente funciona, e assim, priva o aluno de entender como as ideias da matemática surgem e se desenvolvem, concordamos com o que sugere o seguinte autor:

> *“ Com a incrementação de algumas demonstrações o aluno começaria desde cedo a ter realmente o contato com o mínimo rigor que a matemática demanda, aprendendo a se comunicar com uma linguagem clara, precisa e fundamentada na lógica.”* (De Morais Filho, 2012), vide [3].

Dessa forma, consideramos o capítulo do livro analisado como uma boa referência para se estudar progressão aritmética, principalmente no que diz respeito ao encadeamento de seu conteúdo, no qual o autor usa uma linguagem adequada ao público-alvo e, com base, nessa análise recomendamos o estudo dele aos alunos do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] ANTAR NETO, AREF, et al. *Noções de Matemática: Progressões e Logaritmos*. Fortaleza: Vestseller, 2009.

[2] DE MORAIS FILHO, D. C. *Manual de Redação Matemática*. 1ª edição. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010.

[3] DE MORAIS FILHO, D. C. *Um Convite à Matemática*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas*. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2004.

[5] LIMA, et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9ª edição. Coleção do Professor de Matemática; v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] LIMA, et al. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.