Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Unidade Acadêmica de Matemática

Programa de Educação Tutorial

Tutor: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

RESOLUÇÃO COMENTADA DA PROVA DE MATEMÁTICA

ENEM-2015

Equipe de bolsistas que participaram da resolução da prova:

- Artur Mendes Lacet Porto
- Caio Antony Gomes de Matos Andrade
- Fábio Monteiro da Silva
- Ismael Sandro da Silva
- Lucas da Silva
- Lucas Siebra Rocha
- Luís Filipe Ramos Campos da Silva
- Renato de Melo Filho
- Otacilia Meira de Freitas Neta

APRESENTAÇÃO

Campina Grande, 19 de outubro de 2016

Mais uma vez o Grupo PET-Matemática-UFCG oferece aos alunos e professores a resolução da prova de Matemática do ENEM, dessa vez, a do ano de 2015. As questões foram resolvidas por nossos bolsistas, sob minha supervisão. Não temos o interesse de exibir resoluções geniais e imediatas, “macetes” que menosprezam a importância do estudo sério e da verdadeira aprendizagem. Interessa-nos contribuir com seriedade na formação dos alunos que farão essa prova, mostrando as soluções mais naturais que alguém poderia dar ao resolver as questões, sem esquecer de oferecer algumas dicas que um olhar mais perspicaz e mais treinado pode perceber.

Há muito de pessoal na resolução de cada questão, inerente de cada bolsista que a resolveu, por isso o autor de cada resolução é citado ao enunciar a questão. Respeitamos a maneira pessoal de cada um e as opiniões pessoais sobre a prova, até mesmo opiniões que, em raros momentos, contradizem as nossas. Parabenizamos nossos petianos por mais essa realização.

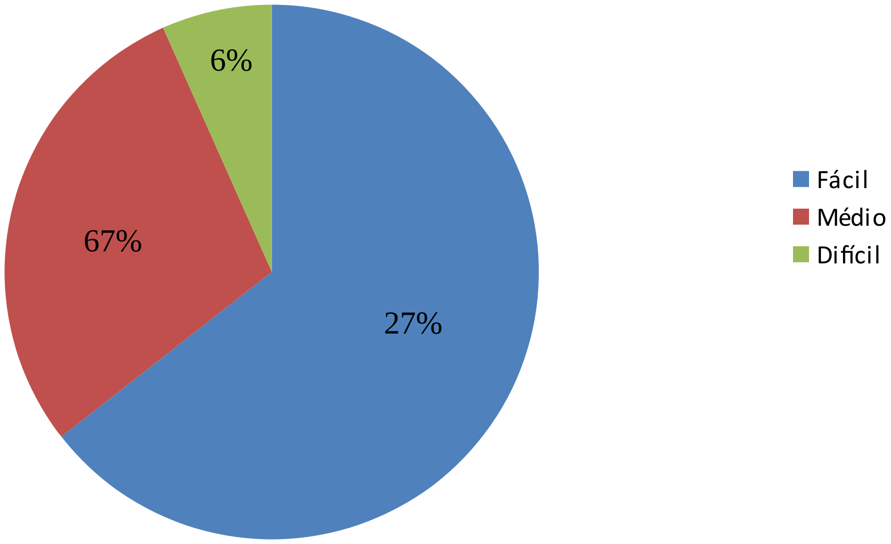
Leitores, esperamos que aproveitem, e, não é demais repetir o que já se conhece: não há sucesso sem estudo dedicado e honesto, e isso toma tempo.

Dedique-se. Boa leitura e esperamos contribuir para que façam uma boa prova de Matemática do ENEM 2016!

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

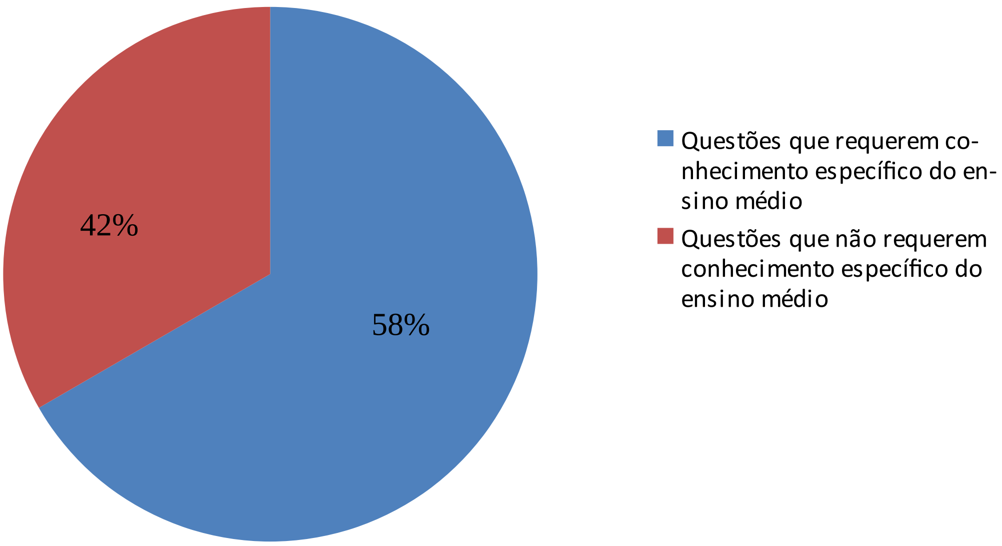
Tutor do Grupo PET-Matemática-UGCG

ENEM 2014 - GRAU DE DIFICULDADE



Fonte: Resolução comentada da prova de matemática ENEM-2014 pelo grupo PET-Matemática UFCG

ENEM 2014 - CONHECIMENTO ESPECÍFICO

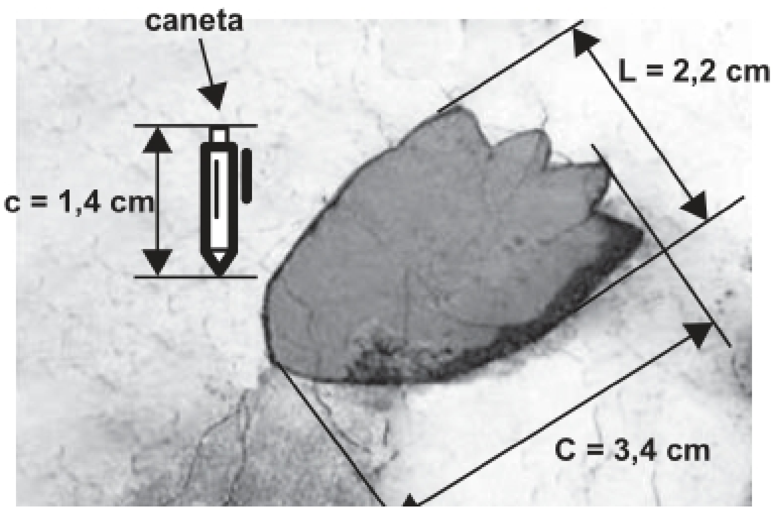


Fonte: Resolução comentada da prova de matemática ENEM-2014 pelo grupo PET-Matemática UFCG

Questão 136

Comentários e resolução por Renato de Melo

Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.
b) 8,6 e 9,8.
c) 14,2 e 15,4.
d) 26,4 e 40,8.
e) 27,5 e 42,5.

- **Resolução:**

A razão entre o comprimento real da caneta e o comprimento da caneta na foto, que é

$$\frac{16{,}8}{1{,}4} = 12$$

nos diz que houve uma redução de 12 vezes entre as medidas reais e as medidas na imagem. Assim, para encontrarmos as medidas reais, devemos multiplicar o comprimento e a largura da pegada por 12 para obtermos as medidas reais. Sejam L_R a largura real e C_R o comprimento real da pegada, teremos:

$$L_R = 12L \Rightarrow L_R = 12 \cdot 2{,}2 = 26{,}4\ cm$$

$$C_R = 12C \Rightarrow C_R = 12 \cdot 3{,}4 = 40{,}8\ cm$$

e assim, a largura e o comprimento reais da pegada serão, respectivamente, 26,4 cm e 40,8 cm.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentários:**

Considero esta questão parcialmente adequada, uma vez que os elaboradores abordaram uma situação que poderia ser real. Por outro lado, a questão não é rica em assuntos matemáticos.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Razão e proporção, que não é ementa do Ensino Médio.

- **Nível da questão:**

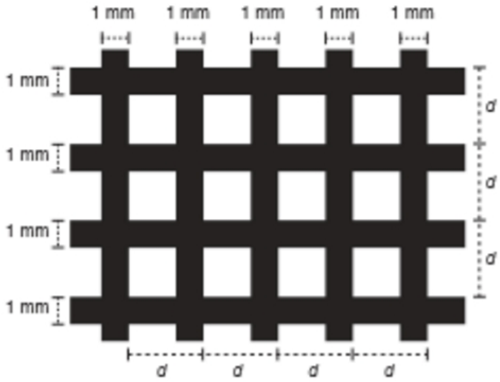
Fácil.

Questão 137

Comentários e resolução por Otacilia Meira

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d–1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

a) 2
b) 1
c) $\frac{11}{3}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{2}{3}$

- **Resolução**

Primeiramente, note que as unidades de medida da malha e do vidro são diferentes. Portanto devemos convertê-las para uma mesma unidade.

A área do vidro é

$$A = 5\,x\,9 = 45\,m$$

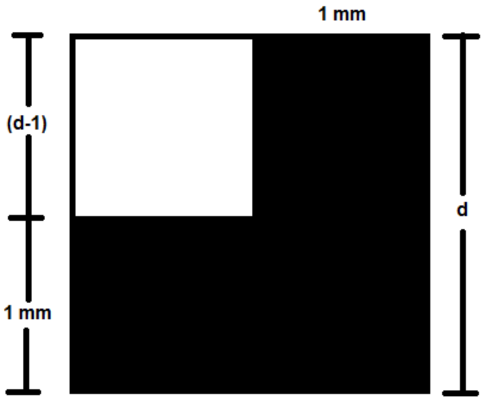
Em mm essa área será de

$$45\,m \cdot 1000 = 45\,000\,mm$$

Dica PET-Matemática

O aluno pode utilizar fatorações com o objetivo de que os cálculos sejam simplificados e a questão seja realizada de forma mais rápida.

Na malha usada para cobrir o vidro, os quadrados de lado d, como na Figura 1, estão distribuídos de maneira uniforme, portanto no comprimento e na largura do vidro teremos n quadrados de lado d



Dica PET-Matemática

Para resolução da questão usamos 25% (1/4 do total), pois assim seria mais fácil fazer as simplificações.

Figura 1

Onde esse n será:

$$n=\frac{largura\,do\,vidro\,em\,mm}{medida\,dos\,quadrados}\cdot\frac{comprimentos\,do\,vidro\,em\,mm}{medida\,dos\,quadrados}$$

$$n=\frac{5\,000}{d}\cdot\frac{9\,000}{d}=\frac{45\,000}{d^2}$$

A taxa de cobertura da malha é de 75%, então a taxa da área descoberta será de 25%, ou seja, $\frac{1}{4}$ da área total.

Com isso, para calcular a medida d usaremos a seguinte equação:

$$n\cdot área\,do\,quadradro\,de\,lado\,(d-1)=\frac{1}{4}\,área\,do\,vidro$$

$$\frac{45\,000}{d^2}\cdot(d-1)^2=\frac{1}{4}\cdot 45\,000$$

$$\frac{(d-1)^2}{d^2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{(d-1)}{d}=\frac{1}{2}$$

$$2d-2=d\Longrightarrow d=2$$

A medida d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é $d=2\,mm$.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário:**

Uma questão contextualizada e que não é tão fantasiosa, porém com seu contexto logo pode fazer com que a pessoa que for responder – lá tenha certa dificuldade para encontrar o ponto chave da questão.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Nenhum específico. Assunto abordado na questão: área e equação do 1º grau.

- **Nível da Questão:**

Difícil.

Questão 138:

Comentários e resolução por Luis Filipe.

Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

a) 105 peças.
b) 120 peças.
c) 210 peças.
d) 243 peças.
e) 420 peças.

- **Resolução:**

Como o arquiteto deseja dividir as peças de forma que elas tenham o maior tamanho possível com o mesmo comprimento para os três tipos de tábuas, esse tamanho poderá ser encontrado fazendo o *Máximo Divisor Comum* de 1080, 810, 540. Para encontrar o máximo divisor comum desses números podemos fatorá-los:

$$1080=2^3.3^3.5 \quad ; \quad 540=2^2.3^3.5 \quad ; \quad 810=2.3^4.5 \ .$$

A partir dessa fatoração iremos identificar os fatores que se repetem com menor expoente e ao multiplicarmos esses fatores iremos encontrar o máximo divisor comum entre eles que é: $2.3^3.5=270$. Mas a questão menciona que comprimento deve ser menor do que $2\,m(200\,cm)$. Então o maior tamanho possível será dado pelo maior divisor em comum, abaixo do máximo que encontramos, visto que, esse máximo não pode ser utilizado. Dessa forma, iremos utilizar 135, pois é o maior divisor para esses números abaixo do máximo. Assim, para encontrar a quantidade de peças produzidas devemos dividir o comprimento total de todos os tipos de tábuas pelo maior tamanho possível já encontrado.

$$Quantidade\,de\;peças=\frac{Comprimento\,total}{135}$$

$$\frac{40.540+30.810+10.1080}{135}$$

$$\frac{40(2^2.3^3.5)+30(2.3^4.5)+10(2^3.3^3.5)}{3^3.5}$$

$$\frac{40(2^2.3^3.5)}{3^3.5}+\frac{30(2.3^4.5)}{3^3.5}+\frac{10(2^3.3^3.5)}{3^3.5}$$

$$160+180+80$$

$$420\;peças \ .$$

Dica PET-Matemática

Uma técnica simples para agilizar as contas é colocar o número $3^3 \cdot 5$ em evidência nas parcelas do denominador e, depois, simplificar com o do denominador.

- **Resposta: alternativa (e).**

- **Comentário:**

Essa é uma questão boa, pois, mesmo não envolvendo um assunto de ensino médio específico, envolve o conceito de Máximo Divisor Comum, conceito este importante na formação de qualquer aluno. O aluno deve ter um cuidado maior com a leitura do enunciado, pois nele está uma informação importante, que é a de que o tamanho máximo das tábuas não pode ser maior do que 2m.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Apesar de não apresentar um assunto específico do ensino médio, a questão envolve o conceito de Máximo Divisor Comum.

- **Nível da questão:**

Médio.

Questão 139

Comentários e resolução por Artur Mendes

A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma "caneta" na qual pode ser inserido um refil contendo 3mL de insulina, como mostra a imagem.

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite. Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

a) 25
b) 15
c) 13
d) 12
e) 8

- **Resolução:**

Inicialmente, é importante observar a unidade que a questão está utilizando. Perceba que o enunciado da questão define 0,01mL como sendo uma unidade de insulina (que chamaremos de u). Observe também que o único dado da questão que está em mL é a capacidade do refil, por isso, vamos convertê-lo para unidade de insulina.

Dica PET-Matemática

Antes de iniciar cada questão idwntifique e separe todos os dados do enunciado para facilitar a sua visualização.

- Capacidade do refil: 3mL
- Unidade de insulina: 0,01mL
- Capacidade do refil em unidades de insulina: x

$$3\,mL = 0{,}01\,ml \cdot x$$
$$x = \frac{3\,mL}{0{,}01\,mL}$$

$$x = 300 \quad .$$

Agora, vamos verificar o número de unidades que são gastos em cada aplicação, visto que há um desperdício de 2 unidades de insulina para cada aplicação.

- Unidades utilizadas em cada aplicação: 10u
- Unidades descartadas em cada aplicação: 2u
- Total de unidades gasto em cada aplicação: 10u + 2u = 12u.

Como o enunciado da questão pede para encontrarmos o número máximo de aplicações por refil, temos que

$$\text{Número máximo} = \frac{300}{12} = 25.$$

Assim, temos que o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita é 25.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário:**

A questão é boa, pois o enunciado aborda um tema corriqueiro na vida de muitos cidadãos, a diabetes e o controle glicêmico. Quanto a resolução da questão, é preciso tomar cuidado, pois a informação de que diariamente são feitas duas aplicações surge para confundir os desatentos, pois o que se pede na questão é apenas o número máximo de aplicações. Por isso, é preciso estar atento à interpretação da questão.

- **Tópicos específicos do Ensino Médio abordados na questão:**

Nenhum específico, apenas manipulações envolvendo unidades de medida.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 140

Comentários e resolução por Caio Antony

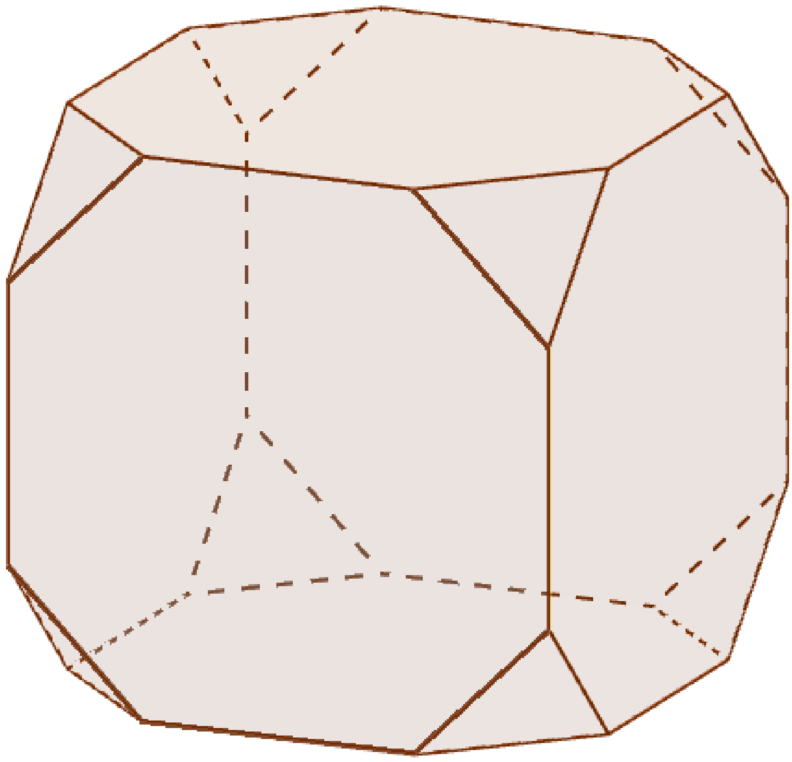
Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que a metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6.
b) 8.
c) 14.
d) 24.
e) 30.

- **Resolução**

O poliedro P descrito no enunciado é da forma:



E podemos ver que ele tem 14 faces, sendo essas 6 faces do cubo e 8 faces dos tetraedros cortados, um para cada vértice.

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentário**

É uma questão simples, mas bem elaborada, exigindo do candidato capacidade de visualização de figuras tridimensionais e conhecimento de sólidos comuns como cubos e tetraedros.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Geometria espacial.

- **Nível da questão**

Fácil.

Questão 141

Resolução e comentário por Ismael Sandro da Silva

-Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) $R\$0,50 \le p < R\$1,50$
b) $R\$1,50 \le p < R\$2,50$
c) $R\$2,50 \le p < R\$3,50$
d) $R\$3,50 \le p < R\$4,50$
e) $R\$4,50 \le p < R\$5,50$

- **Resolução:**

Inicialmente, consideremos que a arrecadação diária, que representaremos por a, é dada pela quantidade de pães especiais vendida multiplicada pelo preço de um pão especial, ou seja,

$$a = p \cdot q$$

A questão pede que a arrecadação diária a ser conseguida com a promoção seja a mesma que a arrecadação antes da promoção, que era de R$ 300,00. Assim, devemos ter

$$300 = pq$$

dos dados da questão temos $q = 400 - 100p$, assim segue-se:

Dica PET-Matemática

Podemos reescrever uma equação do tipo

$$x^2 - sx + p = 0$$

como

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0\ ,$$

onde $x_1 + x_2 = s$ e $x_1 \cdot x_2 = p$

$$300 = p(400 - 100p)$$
$$300 = -100p^2 + 400p \ (\div 100)$$
$$3 = -p^2 + 4p$$
$$p^2 - 4p + 3 = 0$$
$$(p-1)(p-3) = 0$$
$$p = 1 \quad \text{ou} \quad p = 3 \qquad \text{(I)}$$

Antes da promoção a venda diária era de 100 pães especiais com arrecadação de R$ 300,00. O preço do pão valia então

$$p = \frac{300}{100} = R\$3,00$$

Concluímos assim, por (I), que o novo preço do pão é R$ 1,00.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário:**

A principal exigência para a resolução da questão é a sua apropriada interpretação, os conceitos e cálculos presentes na resolução não conferem a complicações acentuadas. É válido ressaltar que é possível resolver a questão sem fazer uso do dado de que a venda diária era de 100 pães antes da promoção, mais especificamente, utilizamos essa informação apenas para concluir em (I) qual era o novo preço do pão especial, mas se o propósito era a de aumentar a quantidade de pães vendidos bastava a escolha do menor preço.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Nenhum específico, apenas o de equações do 2º grau, referente ao ensino fundamental.

- **Nível:**

Fácil.

Questão 142

Resolução e comentário por Lucas Siebra

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.
Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.
Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.
Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.
Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.
Disponível em: www.virushpv.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).
A proposta implementada foi a de número:

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

- **Resolução**

Inicialmente, temos que

- A probabilidade de uma contrair o HPV em uma população não vacinada é 50%.
- A eficácia da vacina é 98%, ou seja, a probabilidade de não funcionar é 100% –98% = 2%
- Desejamos que a probabilidade do HPV ser contraída, após a vacinação seja de 5,9%

Daí, considerando p a porcentagem do público alvo vacinado e (1-p) a do público não vacinado, obtemos que

Prob. de o HPV ser contraído após a vacinação = Prob. contrair a doença · $(1-p)$ + prob. da vacina não funcionar · p

Ou seja,

$$5{,}9\% = 50\% \cdot (1-p) + 2\% \cdot p$$
$$5{,}9\% = 50\% - 50\%\, p + 2\%\, p$$

$$48\%\, p = 44{,}1\%$$
$$p = \frac{44{,}1\%}{48\%} \cong \frac{44}{48} = \frac{11}{12} \cong 0{,}91 = 91\%.$$

Como a proposta escolhida deveria ser aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas, a que melhor atende o que é pedido é a Proposta I.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário**

Essa é uma questão que contém muitas informações, tendo-se que trabalhar com todas. Por isso, no cálculo desejado, deve-se analisar cuidadosamente cada probabilidade dada para obtermos a porcentagem da população pedida. A questão, bem contextualizada, demanda raciocínio e cálculos mais trabalhosos.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Probabilidade.

- **Nível da questão**

Difícil.

Questão 143

Comentários e resolução por Lucas da Silva

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%.

Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t ≥ 1?

a) $P(t)=0,5t^{-1}+8000$
b) $P(t)=50t^{-1}+8000$
c) $P(t)=4000t^{-1}+8000$
d) $P(t)=8000(0,5)^{t-1}$
e) $P(t)=8000(1,5)^{t-1}$

- **Resolução:**

Seja $P(t)$ o número que determina a quantidade unidades produzidas em função de t. Observe que quando $t=1$, temos:

$$P(1)=8000=(1,5)^{1-1}8000$$

Ademais, quando $t=2$, temos:

$$P(2)=P(1)+(0,5)P(1)=P(1)(1+0,5)=P(1)(1,5)$$

Para $t=3$, obtemos:

$$P(3)=P(2)+(0,5)P(2)=P(2)(1+0,5)=P(2)(1,5)=P(1)(1,5)(1,5)$$

Observe que, $\dfrac{P(3)}{P(2)}=\dfrac{P(1)(1,5)(1,5)}{P(1)(1,5)}=1,5$

Como esse aumento percentual se repite nos próximos anos, então a função que descreve o número de unidades produzidas em função de t, é do tipo exponencial. Ademais o aumento da produção de um ano para o anterior tem razão de 1,5.

Assim,

$$P(t)=P(1)(1,5)^{t-1}=8000(1,5)^{t-1}$$

Portanto, $P(t)=8000(1,5)^{t-1}$

- **Resposta: alternativa (e).**

- **Comentário:**

O enunciado da questão é bastante claro ao que se deseja modelar. A grande dificuldade da questão fica a cargo de se perceber que é uma função do tipo exponencial, que está por traz do problema. Ademais, a questão não requer cálculos laboriosos, de certa forma favorece na questão do tempo, pois se evita que o aluno perca tempo fazendo cálculos.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Progressões Geométricas.

- **Nível da questão:**

Médio.

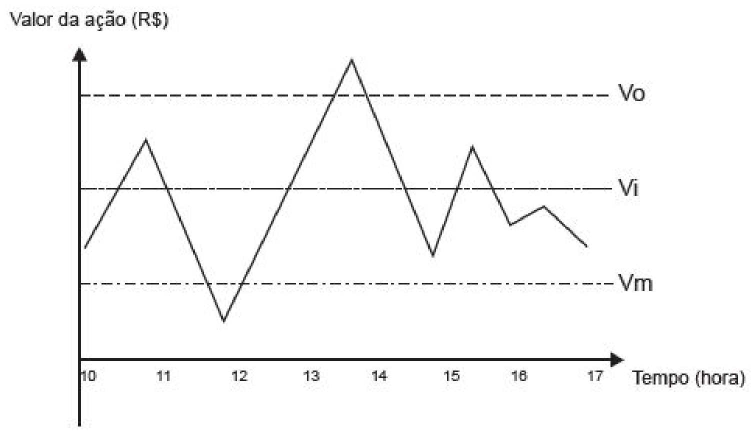
Questão 144

Resolução e comentário por Fábio Monteiro da Silva

Um investidor inicia um dia com x ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

- vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal (Vi);
- compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (vm);
- vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (Vo);

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.

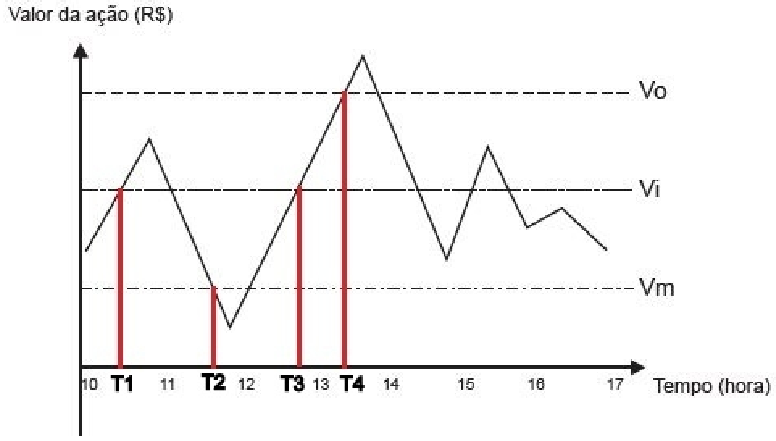


Quantas operações o investidor fez naquele dia?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

- **Resolução:**

Analisando o gráfico e observando as informações do enunciado, temos que o investidor realiza operações no mercado imediatamente depois dos seguintes horários que indicamos por: T1 e T3 – A cotação das ações fica acima do Vi, T2 – A cotação das ações fica abaixo do Vm, e T4 – A cotação das ações fica acima do Vo. Veja a figura abaixo:



Observe que após o instante **T4**, o investidor liquida todas as suas ações e deixa de operar no mercado. Assim, concluímos que o investidor realiza apenas quatro operações.

- **Resposta: alternativa (b)**

- **Comentário:**

Trata-se de uma questão de simples resolução, exigindo do aluno apenas a compreensão das informações do enunciado e comparação com o gráfico. A contextualização é adequada à realidade atual na qual se tem muito contato com noticiários a respeito do funcionamento do mercado de ações e como isso impacta na economia. Entretanto, a questão poderia tratar desse assunto de uma forma mais profunda e crítica não se limitando apenas a visualização de um gráfico. Além disso, existem temas muito mais relevantes no noticiário econômico e que poderiam ser abordados em questões como essa, a exemplo da problemática do controle da inflação no Brasil.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Interpretação de gráficos.

- **Nível:**

Fácil.

Questão 145

Resolução e comentário por Lucas Siebra

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

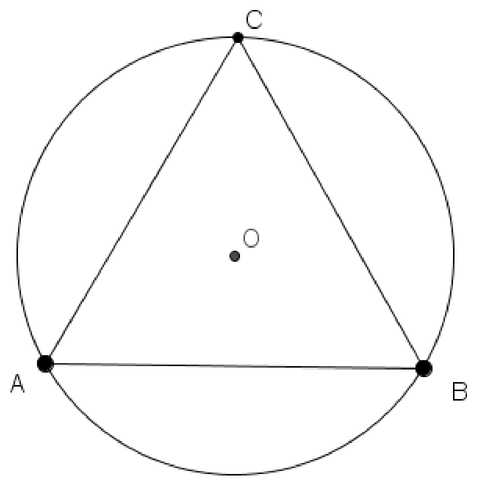
Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

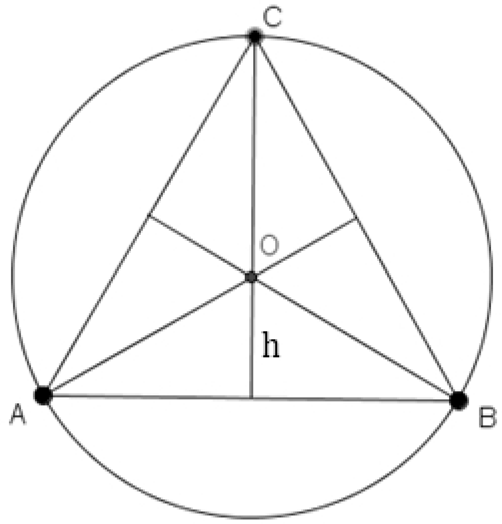
a) 18.
b) 26.
c) 30.
d) 35.
e) 60.

- **Resolução:**

Desejamos encontrar o raio do tampo de vidro circular de uma mesa cuja base é em formato de triângulo equilátero de lado $l = 30\,cm$. Para isso, primeiramente iremos analisar o caso em que o tampo se encaixa perfeitamente na base, ou seja, o triângulo está inscrito na circunferência. Como mostra a imagem a seguir:



O centro O da dessa circunferência, no caso do triângulo equilátero, coincide com o encontro das medianas (baricentro).



Daí, o raio r da circunferência será a distância do baricentro aos vértices do triângulo.

Como o baricentro divide a mediana na razão 2 para 1 e a altura h de um triângulo equilátero é

$$h=\frac{l\sqrt{3}}{2},$$

o raio será dois terços da altura do triângulo:

$$r=\frac{2}{3}\cdot\frac{30\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\frac{30\cdot 1{,}7}{3}$$

$$r=10\cdot 1{,}7=17\,cm.$$

Portanto, dentre as opções, o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa é aquele cujo raio mede 18 cm.

Dica PET-Matemática

Em questões de geometria, como essa, é bom estar em mente equações típicas, como as que envolvem relações trigonométricas, as de volumes e áreas, as que envolvem triângulos equiláteros e as de triângulos inscritos e circunscritos. Caso contrário, essas questões demandariam um maior tempo para encontrar as fórmulas.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário**

Trata-se de uma boa questão, pois apresenta uma situação verossímil que envolve alguns conceitos da geometria plana (como os de baricentro, de triângulo equilátero e triângulo inscrito).

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Geometria Plana.

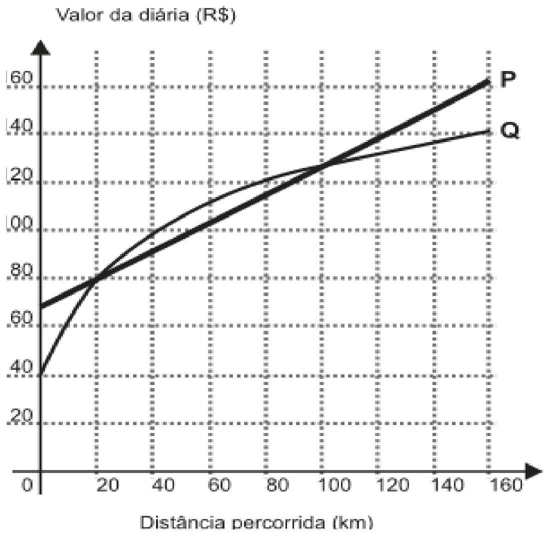
- **Nível da questão**

Médio.

Questão 146

Comentários e resolução por Renato de Melo

Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitrindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis.
Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico

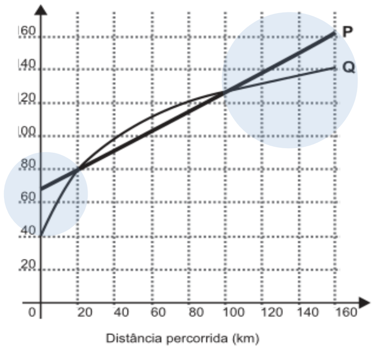


O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

a) De 20 a 100.
b) De 80 a 130.
c) De 100 a 160.
d) De 0 a 20 e de 100 a 160.
e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

- **Resolução:**

Queremos encontrar os intervalos de distância percorrida onde o gráfico de Q se situe abaixo de (ou coincida com) o gráfico de P, pois estes intervalos representam exatamente os intervalos onde o valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P, a região destacada na figura.



Assim, os intervalos são de 0 a 20 e de 100 a 160.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentários:**

A questão é bem elaborada, pois, por mais que seja de simples compreensão, requer conhecimento prévio de um dos principais assuntos que são cobrados no ENEM, a análise de gráficos.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Análise de gráficos.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 147

Comentários e resolução por Otacilia Meira

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

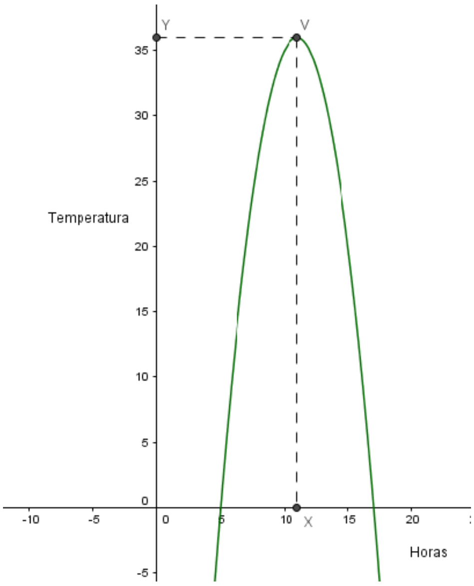
Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa
b) baixa
c) média
d) alta
e) muito alta

- **Resolução:**

Primeiramente, observe que o gráfico da função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ é uma parábola com concavidade para baixo e que existe um valor de h onde a função atinge seu ponto de máximo. Como no gráfico abaixo:



Uma das formas de encontrar o valor h é encontrar as raízes da equação dada, calcular o ponto médio entre elas e substituir na equação. Veja

Calculando as raízes:

$$T(h)=-h^2+22h-85$$
$$-h^2+22h-85=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=22^2-4\cdot(-1)\cdot(-85)=144$$
$$h=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$h=\frac{-22\pm\sqrt{144}}{-2}$$
$$h_1=\frac{-22+12}{-2}=5\ e\ h_2=\frac{-22-12}{-2}=17$$

Ponto Médio:

$$M=\frac{5+17}{2}=11$$

Substituindo na equação:

$$T(h)=-h^2+22h-85$$
$$T(11)=-(11)^2+22\cdot(11)-85=-121+242-85=36$$

A temperatura máxima em que o número de bactérias é o maior possível é 36, classificada como alta.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentário:**

Questão bem contextualizada, de fácil entendimento, que exige que a pessoa que resolve-la tenha noção de função quadrática e seu gráfico.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Função Quadrática.

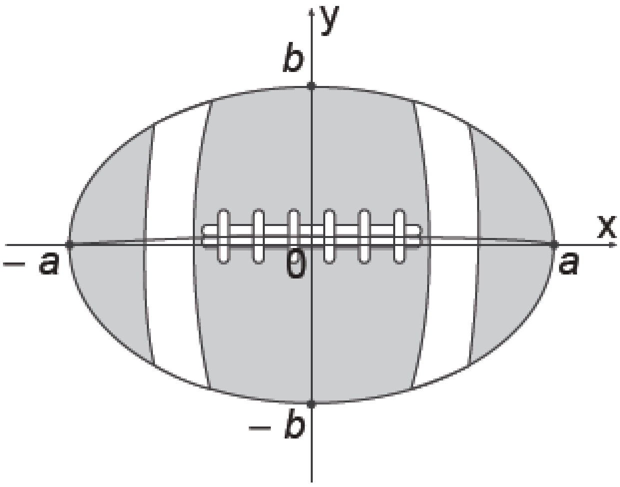
- **Nível da Questão:**

Fácil.

Questão 148

Comentários e resolução por Luis Filipe

A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores *a* e *b* são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$.

O volume dessa bola, em função apenas de *b*, é dado por:

a) $8b^3$
b) $6b^3$
c) $5b^3$
d) $4b^3$
e) $2b^3$

- **Resolução:**

Como foi mencionado na questão que a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical, temos:

$$Comprimento\,Horizontal - Comprimento\,Vertical = \frac{Comprimento\,vertical}{2}.(I)$$

Analisando a figura podemos concluir que o *comprimento horizontal* é $2a$, já que a distância de um dos extremos da bola até o centro no eixo horizontal é *a.* De forma análoga o *comprimento vertical* é $2b$, pois a distância de um dos extremos da bola até o centro no eixo vertical é *b*. Substituindo essas informações em (I) temos:

$$2a - 2b = b \Rightarrow a = \frac{3b}{2}.$$

Temos como objetivo encontrar o volume da bola em função apenas de *b* e foi dado na questão que o volume aproximado dessa bola é dado pela expressão:

$$V=4.a.b^2.(II)$$

Se substituirmos o valor de *a* encontrado em (I) na equação (II) obtemos:

$$V=4.\frac{3b}{2}.b^2 \Rightarrow V=6b^3.$$

- **Resposta: alternativa (b).**

- **Comentário:**

Essa questão não é uma questão boa, pois não é cobrado nenhum conhecimento específico do aluno, visto que, a fórmula do volume da bola já é dada na questão e para se chegar à resposta é necessário apenas que sejam feitas simples manipulações algébricas.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Novamente não é cobrado nenhum assunto específico do ensino médio e o aluno só precisa resolver algumas manipulações algébricas.

- **Nível da questão:**

Fácil.

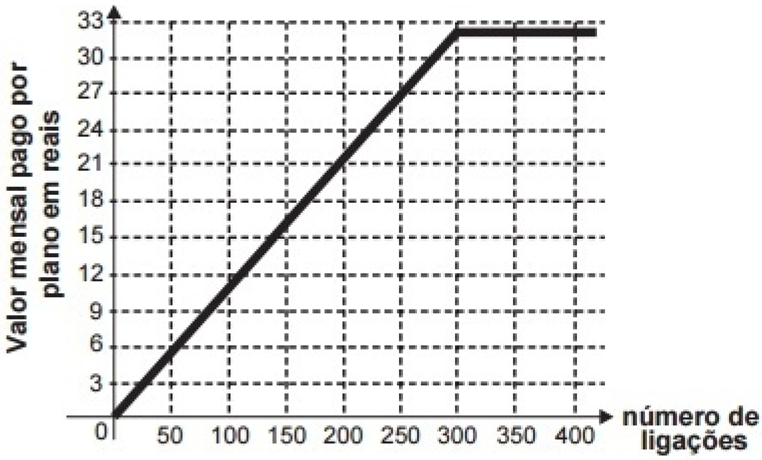
Questão 149

Comentários e resolução por Artur Mendes

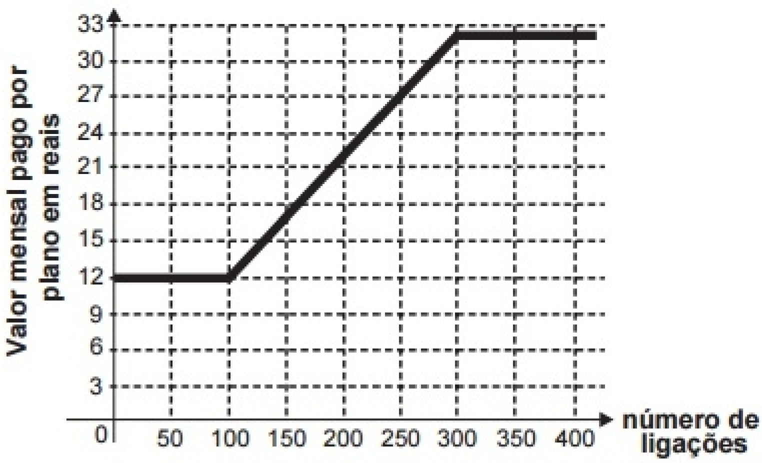
Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

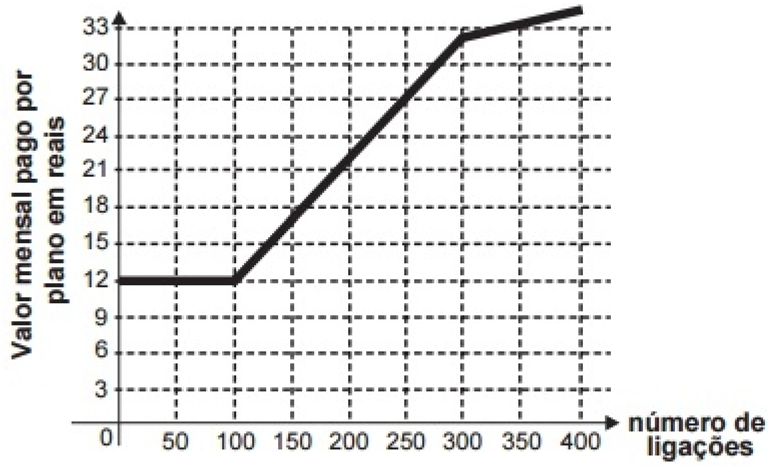
a)



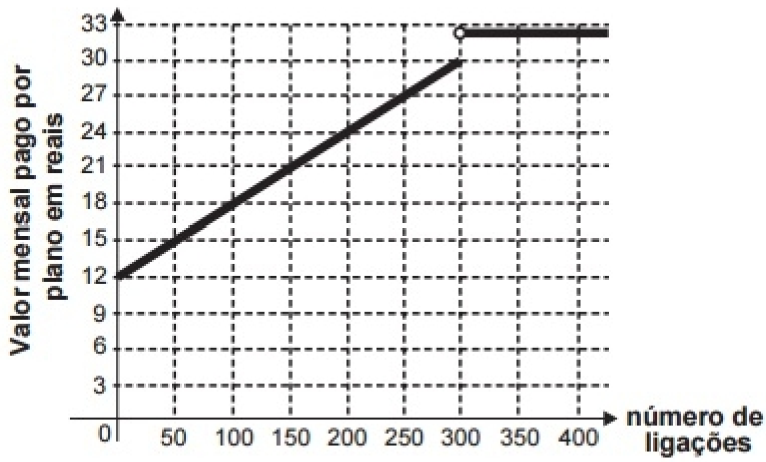
b)



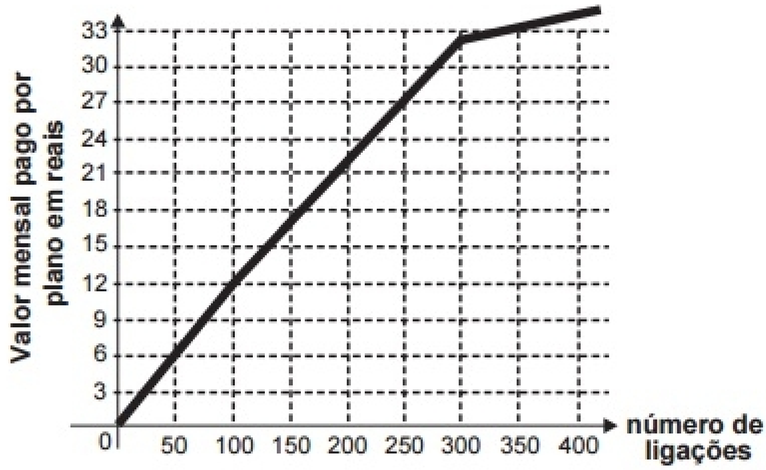
c)



d)



e)



- **Resolução:**

O gráfico da função dada na questão terá três variações, inicialmente a função é uma constante, pois possui um valor fixo e não depende de x. Após 100 ligações a função passa a ser uma reta com um certo coeficiente angular, pois passa a depender do valor de x. E no terceiro momento, após 300 ligações, ela será novamente uma constante.

Analisando caso a caso, veremos que, do momento inicial, quando nenhuma ligação foi realizada, $x=0$, até a 100ª ligação, $x=100$, um valor fixo de $R\$12,00$ é cobrado, ou seja, quando $0 \leq x \leq 100$

$$F(x)=12 \quad .$$

Já no segundo caso, temos que, da 101ª ligação a 300ª ligação, é acrescido um valor de $R\$0,10$ por ligação, além dos $R\$12,00$ cobrados inicialmente, daí, quando $101 \leq x \leq 300$

$$F(x)=0,10(x-100)+12$$

Observe que é necessário subtrair 100 do número x para se obter o valor correto, sem isso teríamos, para $x=101$, por exemplo, $0,10 \cdot 101+12=22,1$ como resposta, um valor diferente do que procuramos.

É possível analisarmos o gráfico da função no intervalo $101 \leq x \leq 300$, para isso basta aplicarmos valores de x dentro do intervalo e traçarmos uma reta entre esses pontos encontrados. Encontrando $F(101)$ e $F(300)$:

Para $F(101)$,

$$F(101)=0,10(101-100)+12$$
$$\Rightarrow F(101)=12,10$$

Para $F(300)$,

$$F(300)=0,10(300-100)+12$$
$$\Rightarrow F(300)=20+12$$
$$\Rightarrow F(300)=32$$

Observe que o gráfico da função $F(x)$ é uma reta que passa por 12,10 e 32.

Agora analisando o terceiro caso, quando são realizadas entre 301 ligações e 500 ligações, temos que o valor volta a ser fixo, ou seja, o gráfico da função $F(x)$ no intervalo $301 \leq x \leq 500$ é uma constante, pois independe do valor de x. Como o valor cobrado da operadora agora passa a ser $R\$32,00$, temos que, no intervalo de $301 \leq x \leq 500$,

$$F(x)=32.$$

Com isso, concluímos que a imagem que corresponde ao gráfico da função $F(x)$ é o gráfico da alternativa B, pois possui, inicialmente, uma reta constante, depois uma reta linear e em seguida outra constante.

- **Resposta: alternativa (b)**

- **Comentário:**

Esta questão foi mal elaborada, pois os gráficos de funções com números naturais não são contínuas, como foi exibido, erroneamente, nas alternativas.

- **Tópicos específicos do Ensino Médio abordados na questão:**

Gráfico de funções.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 150

Comentários e resolução por Caio Antony

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

a) 9.
b) 7.
c) 5.
d) 4.
e) 3.

- **Resolução**

A carta da mesa tem o valor $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. As cartas da mão do jogador que também valem $\frac{3}{4}$ são o próprio $\frac{3}{4}$, o 0,75 e o 75%. Assim, a resposta correta é a alternativa E.

Dica PET-Matemática

As frações são suas amigas, não tenha medo delas! Na verdade, muitas vezes é mais simples trabalhar com frações do que com números decimais.

- **Resposta: Alternativa (e)**

- **Comentário**

É uma questão fácil e de contextualização forçada. Seu objetivo é cobrar que os concorrentes entendam um mínimo sobre frações, o que é muito válido, uma vez que o conhecimento sobre frações é um dos mais importantes que se pode ter na matemática. Considero que a questão não cobra suficientemente tal conhecimento, e portanto não é bem elaborada.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Nenhum específico, apenas conceitos básicos de frações e representações de números racionais.

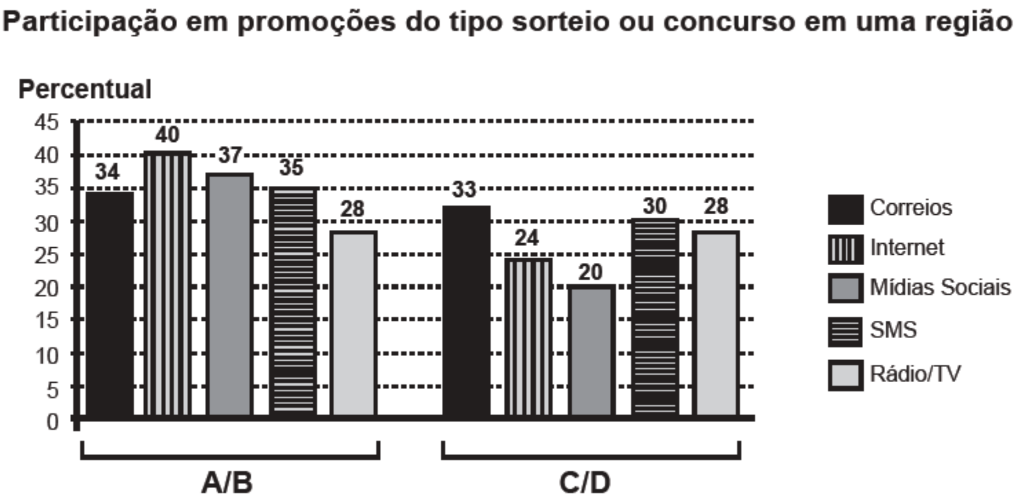
- **Nível da questão**

Fácil.

Questão 151

Resolução e comentário por Ismael Sandro da Silva

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) Correios e SMS.
b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

- **Resolução:**

Basta analisar qual a categoria com maior percentual de participação em promoções nas classes representadas por A/B e C/D, respectivamente. Temos em A/B a internet com 40% e em C/D a categoria dos Correios, com 33%, O que nos dá como resposta internet e Correios. (Confira o gráfico fornecido pela questão)

- **Resposta: alternativa (b)**

- **Comentário:**

A questão não requer cálculos para sua resolução, mas é preciso estar atento para interpretar com praticidade o que a questão solicita e evitar o desperdício de tempo.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Interpretação de gráficos.

- **Nível:**

Fácil.

Questão 152

Resolução e comentário por Lucas Siebra

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1.000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1 000.

- **Resolução:**

Dica PET-Matemática

Muitas vezes, questões que abordam cálculos com porcentagens são melhores de serem trabalhadas com a porcentagem em forma de fração, como neste caso. Assim, foi possível fazer simplificações e não houve necessidade de se trabalhar com números decimais.

Primeiramente, notemos que os dados da questão, bem como as alternativas, são dados em cm^3. Então não haverá necessidade de conversão de unidades!

Nessa questão, estamos interessados em encontrar o volume da mistura sabor morango (V_M) que deverá ser colocada na embalagem de sorvete (V_T), dado que quando levado ao congelador, a mistura tem seu valor aumentado em 25%.

Para isso, devemos encontrar o volume que a mistura chocolate (V_C) ocupará no recipiente quando cremoso (V_{CC}), pois o volume ocupado pelo sabor morango (V_{MC}) preencherá todo o espaço restante. A partir do V_{MC}), podemos, assim, encontrar o (V_M).

Como a embalagem é um paralelepípedo retangular reto, seu volume será

$$V_T = (Área\, da\, base) \cdot Altura$$

$$V_T = (20 \cdot 10) \cdot 10 = 2.000\, cm^3 \ .$$

A questão informa que $V_C = 1.000\, cm^3$ e que $V_{CC} = V_C + 25 \cdot V_C$.

Como desejamos o volume depois de congelado,

$$V_{CC} = 1.000\, cm^3 + 25 \cdot 1.000\, cm^3$$

Dica PET-Matemática

O volume de sólidos que tem duas bases paralelas (Cilindro, prisma, cubo, paralelepípedo, etc) pode ser encontrado por

$$V=(\acute{A}rea\, da\, base)\cdot Altura\ .$$

Enquanto o volume de sólidos como a Pirâmide e o cone, é encontrado por

$$V=\frac{(\acute{A}rea\, da\, base)\cdot Altura}{3}.$$

Notemos que a área da base de cada sólido variará com a situação (podendo ser circular, quadrada, retangular, etc).

$$V_{CC}=1.000+\frac{25}{100}\cdot 1.000=1.250\,cm^3.$$

Já que

$$V_{MC}=V_t-V_{CC},$$

então,

$$V_{MC}=2.000-1.250=750\,cm^3\ .$$

Daí, como

$$V_{MC}=V_M+25\cdot V_M,$$

obtemos que

$$750=\frac{100}{100}V_M+\frac{25}{100}V_M$$

$$750=\frac{125}{100}V_M$$

$$V_M=\frac{750\cdot 100}{125}=\frac{750\cdot 4}{5}=150\cdot 4=600\,cm^3.$$

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentário**

A questão requer uma maior atenção, pois após congelado, a mistura ocupa um novo volume, sendo esse o volume de interesse na questão. Daí, além da necessidade do conhecimento do volume de um paralelepípedo, o aluno precisa ater-se com qual volume irá trabalhar. Ademais, a questão conta com uma aplicação bem formulada, envolvendo a matemática com problemas da indústria.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Geometria Espacial.

- **Nível da questão**

Médio.

Questão 153

Comentários e resolução por Lucas da Silva

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{19}{100}$

c) $\frac{20}{100}$

d) $\frac{21}{100}$

e) $\frac{80}{100}$

Dica PET-Matemática

Como o evento retratado na questão é formado por um único elemento do espaço amostral, podemos utilizar a fórmula:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

- **Resolução:**

Vamos denominar o símbolo Ω como sendo o espaço amostral e $n(\Omega)$ o número total de resultados possíveis. Ademais, vamos denominar o símbolo A como sendo um subconjunto do espaço amostral e $n(A)$ o número de eventos simples favoráveis à ocorrência do evento A. Como Ω possui 100 elementos tem-se $n(\Omega)$ é igual a 100 e como A possui 20 elementos tem-se $n(A)$ é de 20. Pela (Definição Clássica de Probabilidade) temos:

$$P(A)=\frac{\textit{Número de eventos simples favoráveis à ocorrência do evento } A}{\textit{Número total de resultados possíveis}}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Onde, $P(A)$ é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20. Logo,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{100}$$

- **Resposta: alternativa (c).**

- **Comentário:**

Algo que fica explicito nessa questão, é o fato que a questão foi disposta apenas para testar o leitor, ou seja, para ver se o mesmo sabe ou não do princípio básico do tema abordado, tendo em vista que sua resolução segue só do fato de conhecer a definição clássica de probabilidade.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Probabilidade.

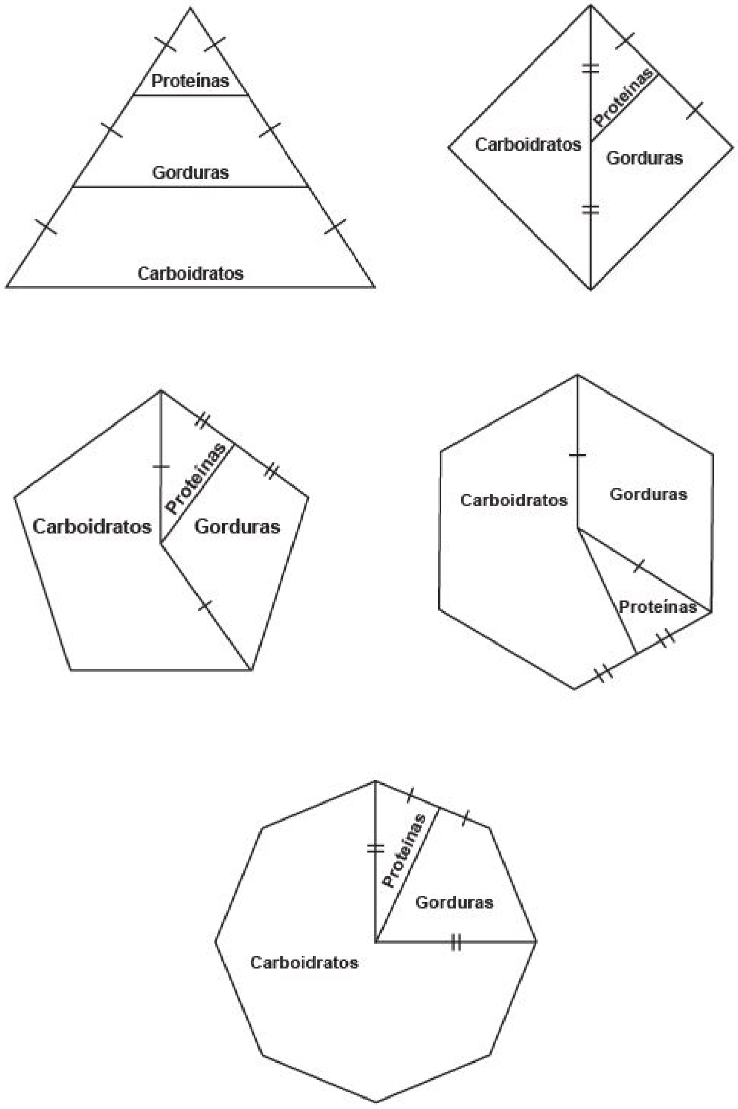
- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 154

Resolução e comentário por Fábio Monteiro da Silva

Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

a) triângulo.
b) losango.

c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

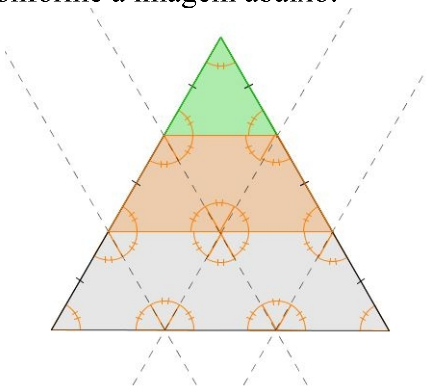
- **Resolução:**

Segundo os dados da questão devemos procurar pela representação mais próxima possível da seguinte distribuição:

- Proteínas (10%)
- Gorduras (30%)
- Carboidratos (60%)

Queremos saber qual figura tem as áreas destacadas proporcionais às porcentagens mencionadas.

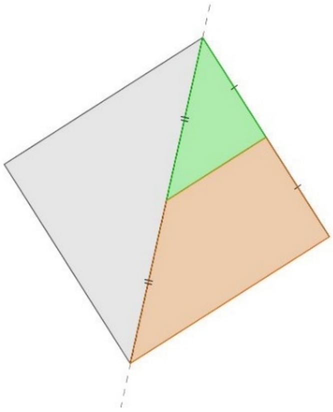
Vamos analisar o triângulo equilátero da figura dada no enunciado. Percebemos que o mesmo pode ser dividido em triângulos menores, todos congruentes ao triângulo que representa a porcentagem das proteínas (10%), conforme a imagem abaixo:



Veja que a congruência em questão é decorrência do fato dos triângulos possuírem ângulos correspondentes congruentes.

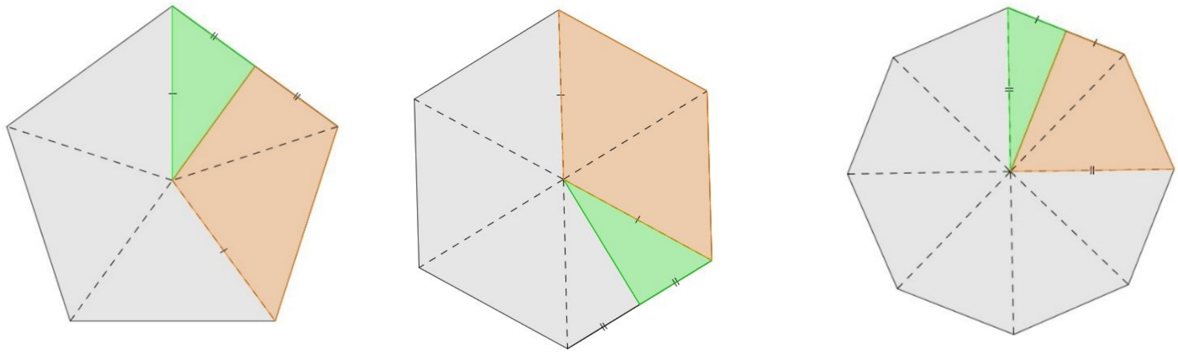
Perceba que o trapézio cinza, o que representa as porcentagens dos carboidratos, pode ser decomposto em 5 triângulos equiláteros côngruos ao triângulo das proteínas (cuja área é proporcional a 10%). Logo, a sua área equivale a $5 x 10 = 50$, o que contraria o enunciado.

Com relação ao losango, temos que a diagonal o divide em dois triângulos congruentes e portanto com a mesma área. Observe a figura abaixo:



Assim, a área em cinza – carboidratos – corresponde a 50 da área total, o que também não reflete o enunciado.

Temos que para os polígonos regulares seguintes podemos decompor todos em triângulos congruentes. Observe a figura:



Para o pentágono, temos o seguinte:

- Proteínas 10%
- Carboidratos $3 \cdot 2 \cdot 10\% = 60\%$, pois todo triângulo cinza pode ser dividido em dois triângulos verdes.
- Gorduras $.3 \cdot 10\% = 30\%$

Logo, a figura que melhor representa a distribuição de porcentagens é o Pentágono.

Se quisermos apenas verificar as demais figuras, temos:

Para o Hexágono:

- Proteínas 10%
- Carboidratos $7 \cdot 10\% = 70\%$
- Gorduras $4 \cdot 10\% = 40\%$

E para o Octógono:

- Proteínas 10%

- Carboidratos $12 \cdot 10 = 120\%$
- Gorduras $3 \cdot 10\% = 30\%$

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentário:**

A questão não exige muitos cálculos, entretanto é preciso estar atento a possibilidade de decompor polígonos regulares em triângulos côngruos, além de conhecer algumas noções sobre congruência de triângulos. A abordagem da questão é muito peculiar pois é deixada implícita uma relação com a Estatística no que diz respeito à Representação Gráfica de dados. Muitas vezes, a publicidade utiliza-se de ideias como essa para tornar os dados mais sugestivos.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Geometria Plana e Estatística.

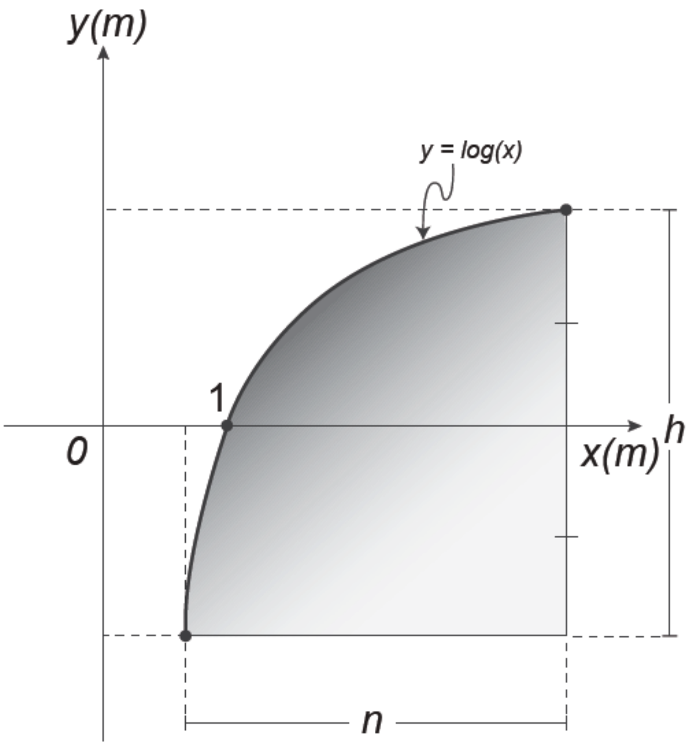
- **Nível:**

Médio.

Questão 155:

Comentários e resolução por Luis Filipe.

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log(x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo *x* sempre divida ao meio a altura *h* do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo *x*. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura *h* do vidro em função da medida *n* de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) - \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

c) $\log\left(1+\frac{n}{2}\right) + \log\left(1-\frac{n}{2}\right)$

d) $\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

e) 2 log $\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

- **Resolução:**

Ao analisarmos a figura do enunciado podemos perceber que:

$$\begin{cases} \log(k+n)=\frac{h}{2} \\ \log k=\frac{-h}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=2.\log(k+n)(I) \\ h=-2.\log k(II). \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$2.\log(k+n)=-2\log k$$
$$\log(k+n)=-\log k$$
$$\log(k+n)+\log k=0.(III)$$

Podemos aplicar à (III) uma das propriedades de logaritmo que afirma que:

$$\log_a b+\log_a c=\log_a(b.c).$$

Daí,

$$\log[(k+n).k]=0$$
$$(k+n).k=1$$
$$k^2+nk-1=0$$

Chegamos a uma equação do 2º grau e podemos encontrar as raízes desta equação. Primeiramente iremos encontrar o delta.

$$\Delta=n^2-4.1.(-1)$$

Como raiz da equação temos,

$$k=\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}(IV)$$

Pois $k>0$, visto que a função logarítmica só está definida para valores positivos.
Agora, iremos substituir $(IV)em(I)$.

$$h=2.\log\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}+n\right)$$
$$h=2.\log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right).$$

- **Resposta: alternativa (e).**

- **Comentário:**

É uma questão interessante, pois aborda um assunto importante que é funções logarítmicas. Além disso, exige que o aluno saiba interpretar gráficos desse tipo de função e no caso específico dessa questão, a interpretação do gráfico é essencial.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Funções Logarítmicas.

- **Nível da questão:**

Difícil.

Questão 156

Comentários e resulução por Renato de Melo

Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado na superfície corporal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de

a) 0,624.
b) 52,0.
c) 156,0.
d) 750,0.
e) 1 201,9.

- **Resolução:**

O primeiro passo é encontrar na tabela a área da superfície corporal do felino em questão.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. **O paciente felino**. São Paulo: Roca, 2009.

Como o felino tem 3.0 kg, então a área de sua superfície corporal é de 0,208 m^2.

Agora, pelo enunciado, a dosagem diária a ser administrada é de 250 mg por metro quadrado na superfície corporal. Para descobrirmos a dosagem diária do felino em questão, devemos multiplicar a área 0,208 m^2 por 250 mg/m^2 :

$$0,208\ \mathrm{m}^2 \cdot 250\ \mathrm{mg/m}^2 = 52,0\ \mathrm{mg}$$

- **Resposta: alternativa (b)**

- **Comentários:**

Esta questão é simples no que se refere a matemática, mas bem elaborada com relação à contextualização, pois traz uma situação não muito comum, mas possível.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Nenhum específico, apenas manipulações envolvendo unidades de medida.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 157

Comentários e resolução por Otacilia Meira

Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, $0{,}08\,m^3$ de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser

a) 16
b) 800
c) 1 600
d) 8 000
e) 16 000

- **Resolução:**

Como queremos saber a capacidade mínima em litros e os dados estão em m^3, deixaremos todas as unidades de medida em litros.

Uma pessoa consome diariamente $0{,}08\,m^3$. Em litros esse consumo é de

$$0{,}08\,m^3 \cdot 1000 = 80\,l$$

Dez pessoas consomem diariamente

$$80\,l \cdot 10 = 800\,l$$

Em 20 dias esse consumo será

$$800\,l \cdot 20 = 16\,000\,l$$

Dica PET-Matemática

Atenção com as unidades de medidas e evite, sempre que puder e for possível, números decimais.

- **Resposta: alternativa (e)**

- **Comentário:**

Questão simples, pois não exige cálculos complicados, exigindo apenas que o aluno entenda de conversão de medidas.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Nenhum específico, apenas conversão de medidas.

- **Nível da Questão:**

Fácil.

Questão 158:

Comentários e resolução por Luis Filipe.

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping.* Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I**:** sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II**:** sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III**:** sortear primeiro três equipes e, então,sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que *P*(I), *P*(II) e *P*(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se:

a) *P*(I) < *P*(III) < *P*(II)
b) *P*(II) < *P*(I) < *P*(III)
c) *P*(I) < *P*(II) = *P*(III)
d) *P*(I) = *P*(II) < *P*(III)
e) *P*(I) = *P*(II) = *P*(III)

- **Resolução:**

Primeiramente vamos analisar a probabilidade do atleta que utilizou substância proibida no caso do sorteio ser feito pelo *Modo I*.

Para chegarmos a uma razão de probabilidade, devemos lembrar que o numerador é o número de elementos do evento e o denominador a quantidade de elementos do espaço amostral. Assim, para chegamos a probabilidade no modo I, vamos escolher 3 atletas dentre todos os participantes. Como a quantidade total de participantes é o número de equipes multiplicado pela quantidade de atletas de cada equipe, ou seja, $20.10=200$. Assim, teremos de escolher 3 atletas em um universo de 200 atletas no total.

$$P(I)=\frac{3}{200}.$$

Agora vamos analisar a probabilidade do atleta que utilizou substância proibida no caso do sorteio ser feito pelo *Modo II*.

Nesse modo, iremos escolher primeiramente uma das vinte equipes $\frac{1}{20}$, depois iremos escolher 3 atletas de cada equipe, se cada equipe tem 10 atletas, teremos $\frac{3}{10}$. Quando se trata da probabilidade de um determinado evento acontecer *e* outro acontecer, multiplicamos as probabilidades dos dois eventos.

$$P(II)=\frac{1}{20}.\frac{3}{10}=\frac{3}{200}.$$

Por último, vamos analisar a probabilidade no caso do sorteio ser feito pelo *Modo III:*

No terceiro modo, a probabilidade de sortearmos uma equipe entre as 20 é $\frac{1}{20}$ e a probabilidade de sortearmos uma atleta dessa equipe é $\frac{1}{10}$, mas, como temos 3 equipes, iremos multiplicar as probabilidades dos dois eventos e multiplicar também pela quantidade de equipes.

$$P(III)=3.\frac{1}{20}.\frac{1}{10}=\frac{3}{200}.$$

- **Resposta: alternativa (e).**

- **Comentário:**

Essa é uma questão interessante, pois apesar de não apresentar muitos cálculos exige um conhecimento de probabilidade, e tal conhecimento é importante para um aluno do ensino médio.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Probabilidade.

- **Nível da questão:**

Médio.

Questão 159

Comentários e resolução por Artur Mendes

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x)=8+5\cos(\frac{\pi x-\pi}{6})$, onde x representa o mês do ano, sendo $x=1$ associado ao mês de janeiro, $x=2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x=12$ associado ao mês de dezembro.

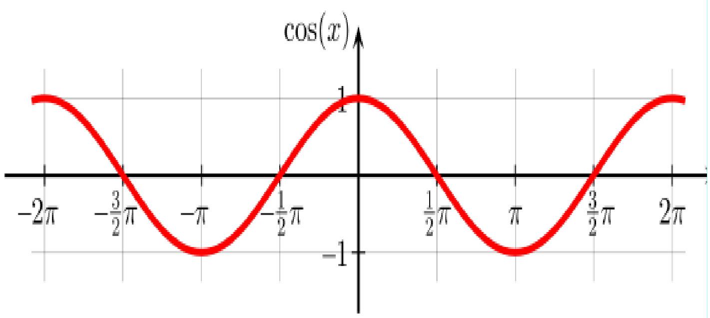
Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) Janeiro.
b) Fevereiro.
c) Junho.
d) Julho.
e) Outubro.

- **Resolução:**

Antes de iniciar a resolução é preciso nos ater aos detalhes do enunciado, observe que a função P(x) é o preço do quilograma de um certo produto sazonal, e a questão pede o mês de produção máxima da safra, ou seja, o mês em que o preço do produto é mais baixo. Então, o que queremos encontrar é o menor valor da função P(x).

Observe o gráfico da função cosseno abaixo:



Dica PET-Matemática:

Ter em mente os valores do seno e cosseno dos pontos notáveis $\left(0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}\ \text{e}\ 2\pi\right)$ das funções trigonométricas é essencial para a resolução de questões envolvendo as funções seno, cosseno e tangente.

Perceba que a função cosseno, ao longo de todo o seu intervalo, varia de -1 a 1 , logo, se queremos encontrar o valor mínimo da função $P(x)$, no intervalo entre 1 e 12, devemos procurar o valor do cosseno quando $\cos(\frac{\pi x-\pi}{6})=\cos\pi=-1$. Para que essa igualdade aconteça devemos ter

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi$$

Colocando π em evidencia, teremos

$$\frac{\pi(x-1)}{6} = \pi$$

Multiplicando ambos os membros da equação por 6,

$$\pi(x-1) = \pi 6$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por π,

$$x - 1 = 6$$
$$\Longrightarrow x = 7$$

Assim, temos que o mês de produção máxima desse produto é em julho ($x=7$).

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentário:**

A questão é boa, pois exige um conhecimento básico de funções trigonométricas e seus pontos notáveis.

- **Tópicos específicos do Ensino Médio abordados na questão:**

Funções trigonométricas.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 160

Comentários e resolução por Caio Antony

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participam do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21.
b) 90.
c) 750.
d) 1250.
e) 3125.

- **Resolução**

Comecemos notando que existem cinco escolas a serem avaliadas, cada uma com cinco possíveis notas.

Veja que as escolas I, III e V não podem passar a escola II independentemente da nota que receberem. Só considerando as notas delas, o princípio multiplicativo nos dá que existem $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ possibilidades de votos, e nenhuma delas impede a vitória da escola II.

Avaliemos então a situação da escola IV separadamente, uma vez que ela pode vencer a escola II. Primeiramente, a escola IV teve 10 + 9 = 19 pontos no quesito Enredo e Harmonia, enquanto a escola II teve 10 + 10 = 20. Assim, a escola II ganha no desempate, pelas regras dadas no enunciado. As situações em que a escola II ganha são:

- Se a escola IV tirar 6 e a II tirar 8, 9 ou 10.
- Se a escola IV tirar 7 e a II tirar 9 ou 10.
- Se a escola IV tirar 8 e a II tirar 10.

Ou seja, existem 6 situações em que a escola II ganha da escola IV. Pelo princípio multiplicativo, considerando todas as notas, tempos que existem $5\cdot5\cdot5\cdot6=125\cdot6=750$ situações em que a escola II vence o Carnaval.

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentário**

É uma questão bem elaborada. A contextualização do problema não parece forçada, o conteúdo de análise combinatória é extremamente relevante e é bem cobrado no problema.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Análise combinatória.

- **Nível da questão**

Médio.

Questão 161

Resolução e comentário por Ismael Sandro da Silva

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

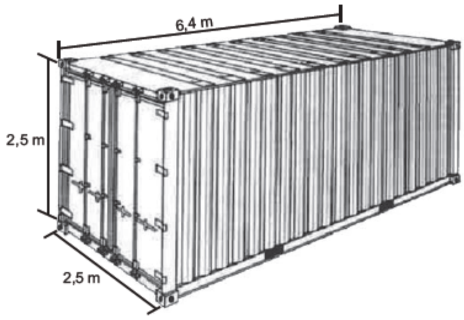


Figura 1

Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

a)12,5 m.
b)17,5 m.
c) 25,0 m.
d) 22,5 m.
e) 32,5 m.

- **Resolução:**

Devemos procurar uma disposição dos contêineres segundo a seguinte exigência:

Os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

É pertinente indagar se alguns dos valores das medidas dos contêineres são múltiplos das medidas da área reservada para o armazenamento dos contêineres, pois isso pode nos sugerir uma possível disposição dos contêineres. Atentando aos valores das dimensões do contêiner, $2,5m$ e $6,4m$, constatamos que $2,5$ é um múltiplo de 10 ($10=2,5\cdot 4$). Falta verificar se $6,4$ é múltiplo de 32, o que de fato é verificado, temos $32=6,4\cdot 5$.

As figuras ilustrativas da questão nos dão como dimensões da área para armazenamento dos contêineres $32m$ de comprimento e $10m$ de largura conforme a figura que segue:

Figura 2

Somos conduzidos a dispor os contêineres com o lado de medida $6,4m$ paralelo ao lado maior da área de armazenamento (com isso o de $2,5m$ paralelo ao lado de $10m$). Tentar outra disposição nos levaria a não cumprir a exigência estabelecida pela questão, verifica-se que se colocarmos o lado de medida $6,4m$ paralelo ao lado de $10m$ da área de armazenamento só caberia, neste lado do terreno, o lado de $2,5m$ de outro contêiner, sobrando $0,1m$ do lado de $10m$.

Isso nos possibilita agrupar 20 contêineres numa primeira camada, como temos 100 contêineres a serem guardados, finalizamos com uma pilha com 5 dessas camadas, ou seja, 5 contêineres de altura. Como cada contêiner tem 2,5 metros de altura, obtemos como altura da pilha $5\cdot(2,5m)=12,5m$.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário:**

Observe-se que para a resolução da questão foi necessário apenas, de modo geral, uma análise das possibilidades de disposição dos contêineres. Nesse tipo de questão é pertinente fazer um desenho como rascunho, podendo ser utilizado até a própria figura da prova para poupar espaço. Fazendo isso pode se concluir que qualquer outra disposição dos contêineres culminaria em sobras ou excessos na área de armazenamento.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

O conteúdo abordado é de múltiplo e operações com números decimais, estudados no Ensino fundamental.

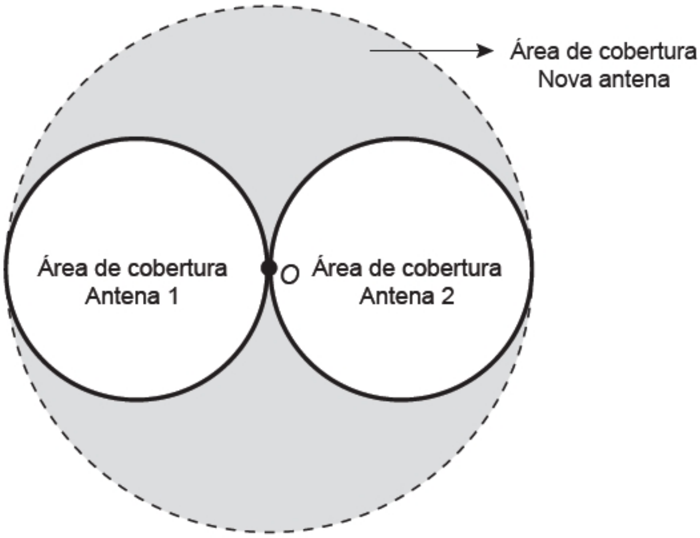
- **Nível:**

Fácil.

Questão 162

Resolução e comentário por Lucas Siebra

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto *O*, como mostra a figura



O ponto *O* indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8 π .
b) 12 π .
c) 16 π .
d) 32 π .
e) 64 π .

- **Resolução**

Notemos que não haverá necessidade de conversão de unidades, pois todos os dados informados estão em km^2.

Primeiramente, encontremos a área de cobertura antiga (A_a) gerada pelas duas antenas, que é formada por dois círculos de raio 2 km $(A_1 e\, A_2)$:

Como

$$A_1 = A_2 = \pi r^2 = \pi 2^2 = 4\pi\, km^2,$$

então,

$$A_a = 8\pi\, km^2.$$

Agora, nos atentemos à área da cobertura nova (A_n) . Como a circunferência de centro O tangencia externamente as circunferências das áreas das coberturas menores e O é o ponto de tangência dos círculos de raio 2, então o diâmetro da nova área de cobertura será a soma dos diâmetros das circunferências menores. Donde o raio da circunferência maior também será o dobro dos raios das circunferências menores, ou seja, 4 km^2 .

Daí,

$$A_n=\pi 4^2=16\pi km^2$$

Como desejamos encontrar a área ampliada (A_a) e

$$A_a=A_t-(A_1+A_2),$$

então,

$$A_a=16\pi-(4\pi+4\pi)=8\pi km^2.$$

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário**

Uma boa aplicação matemática, pois envolve conceitos de área e do funcionamento de antenas de rádio. A imagem é um importante auxiliador no entendimento da questão, pois é a partir dela que conseguimos perceber que o diâmetro da circunferência maior é o dobro do diâmetro da circunferência menor.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Geometria Plana.

- **Nível da questão**

Fácil.

Questão 163

Comentários e resolução por Lucas da Silva

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juros de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) 2 075,00.
b) 2 093,00.
c) 2 138,00.
d) 2 255,00.
e) 2 300,00.

- **Resolução:**

Sabe-se que o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juros de 1% sobre o saldo devedor. Como a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00, então na nona prestação o saldo devedor terá diminuído 9×500,00= 4500,00 reais do saldo devedor livre de juros. Assim na décima prestação o casal deve pagar 1% de $(180\,000{,}00-4\,500{,}00)=175\,500{,}00$, que é $1750{,}00$ reais acrescido da prestação de 500,00 reais. Assim na décima prestação o casal deve pagar 2255,00 reais.

- **Resposta: alternativa (d).**

- **Comentário:**

Esse é um bom problema, pois modela algo que é facilmente visto no dia a dia, que é a questão de juros sobre dívidas. Mas um ponto ao qual a questão deixa a desejar, é que os dados são inverosímeis, pois num financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais a taxa de juros que foi dada está completamente fora da realidade.

Nota-se que no enunciado da questão aparece a seguinte observação

"Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00".

Veja que a expressão "se reduz" está causando uma ambiguidade, pois o leitor pode interpretar que fazendo um único pagamento o saldo devedor será apenas de *R$ 500,00.* A observação poderia ter sido escrita da seguinte maneira

"Observe que, a cada pagamento, é quitado valor de R$ 500,00 sobre o saldo devedor".

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Juros.

- **Nível da questão:**

Médio.

Questão 164

Resolução e comentário por Fábio Monteiro da Silva

As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

Disponível em: www.noticiasagricolas.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de

a) $4{,}129 \times 10^{3}$
b) $4{,}129 \times 10^{6}$
c) $4{,}129 \times 10^{9}$
d) $4{,}129 \times 10^{12}$
e) $4{,}129 \times 10^{15}$

- **Resolução:**

Observe que 4,129 milhões de toneladas = $4{,}129 \times 10^6$ toneladas, pois 1 milhão = 10^6.

Mas atenção! Veja que essa resposta é uma das assertivas, entretanto não é a resposta correta, pois o enunciado solicita a quantidade em quilogramas. Assim, sabendo que 1 tonelada = Mil quilos = 10^3 Kg, temos que:

$$4{,}129 \text{ milhões de toneladas} = 4{,}129 \times 10^6 \times 10^3 \text{ Kg} = 4{,}129 \times 10^9 \text{ Kg}.$$

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentário:**

Questão simples, mas é necessário estar atento para não se confundir com as unidades.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

O conteúdo abordado é relativo ao tópico "Unidades de Medida", visto durante o ensino fundamental.

- **Nível:**

Fácil.

Questão 165

Comentários e resolução por Otacilia Meira

A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$dose\ \ de\ \ criança\ = \left(\frac{idade\ \ da\ \ criança\ \ (em\ \ anos)}{idade\ \ da\ \ criança\ \ (em\ \ anos)+12}\right)\cdot\ dose\ \ de\ \ adulto$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a

a) 15
b) 20
c) 30
d) 36
e) 40

- **Resolução**

Como a enfermeira não sabe a idade da criança (que denotaremos por a) para poder lhe dar a dosagem certa do medicamento X, utilizaremos as dosagens do medicamente Y para descobrir sua idade.

Então, substituindo os valores na "Fórmula de Young", dada na questão temo,

$$14\,mg=\left(\frac{a}{a+12}\right)\cdot 42\,mg$$
$$14a+14\cdot 12=42a$$
$$28a=14\cdot 12$$
$$(14\cdot 2)a=14\cdot 12$$
$$a=6\quad .$$

Agora, usando a idade da criança encontrada anteriormente para encontrar a dose de criança (que denotaremos por d) temos,

$$d=\left(\frac{6}{18}\right)\cdot 60\,mg$$
$$d=\left(\frac{6\cdot 6\cdot 10}{6\cdot 3}\right)$$
$$d=\left(\frac{6\cdot 10}{3}\right)$$
$$d=2\cdot 10=20\quad .$$

Portanto, a dosagem de criança do medicamento X é 20 mg.

- **Resposta: alternativa (b)**

- **Comentário:**

Uma questão bem escrita onde expõem todos os dados necessários para poder obter êxito em sua resolução, que usa de um contexto fantasioso, uma vez que a "Fórmula de Young" realmente existe.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Assunto abordado na questão: Expressão Algébrica

- **Nível da Questão:**

Fácil.

Questão 166:

Comentários e resolução por Luis Filipe.

Segundo dados apurados no Censo 2010, para uma população de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em

2010, a renda média mensal apurada foi de R$ 1 202,00. A soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres correspondeu a apenas 1,1% do total de rendimentos

dessa população considerada, enquanto que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos correspondeu a 44,5% desse total.

Qual foi a diferença, em reais, entre a renda média mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos e de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais pobres?

a) 240,40
b) 548,11
c) 1 723,67
d) 4 026,70
e) 5 216,68

- **Resolução:**

A renda total gerada pela população de 101,8 milhões é obtida fazendo a renda média mensal multiplicada pela população de 101,8 milhões, ou seja, 1202 x 101,8 milhões.

Dica PET-Matemática

O aluno deve prestar atenção para quando for realizar os cálculos pois, alguns termos podem ser cancelados e as contas se tornarão bem mais simples.

A renda média de um brasileiro na faixa dos 10% mais pobres é dada por:

$$\frac{1{,}1\,(renda\ \ total\ \ gerada)}{(Quantidade\ \ de\ \ pobres)}.$$

$$\frac{\frac{1{,}1}{100}.1202.101{,}8}{\frac{10}{100}.101{,}8}$$

$$1{,}1.\frac{1202}{10}$$

$$132{,}22.$$

Já que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres é de 1,1% da renda total gerada e para saber a renda média ainda devemos dividir pela quantidade de pobres em relação a população total.

A renda média de um brasileiro na faixa dos 10% mais ricos é dada por:

$$\frac{44{,}5\,(renda\ \ toral\ \ gerada)}{(Quantidade\ \ de\ \ ricos)}.$$

$$\frac{\frac{44{,}5}{100}.1202.101{,}8}{\frac{10}{100}.101{,}8}$$

$$44{,}5\,.\,\frac{1202}{10}$$
$$5348{,}90\,.$$

Já que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos é de 44,5% da renda total gerada e para saber a renda média ainda devemos dividir pela quantidade de ricos em relação a população total.

A diferença entre a renda mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos para um brasileiro que está na faixa dos 10% mais pobres é :

$$5348{,}90 - 132{,}22 = 5216{,}68\,.$$

- **Resposta: alternativa (e).**

- **Comentário:**

É uma questão que não é interessante, pois, não exige do aluno um conhecimento relevante. Além disso, exige um cuidado maior na hora da interpretação, para que o aluno entenda o que está sendo pedido de forma mais rápida, pois os dados estão colocados de forma confusa.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Apesar de não ser cobrado na questão um assunto específico do ensino médio, é cobrado um conceito de porcentagem.

- **Nível da questão:**

Fácil**.**

Questão 167

Resolução e comentário por Ismael Sandro da Silva.

Em uma seletiva para a final dos 100 m livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

a) 20,70.
b) 20,77.
c) 20,80.
d) 20,85.
e) 20,90.

- **Resolução:**

A mediana de uma lista *ordenada* de dados é um conceito da Estatística que se refere ao dado que ocupa a posição central nos dados observados, isto é, deixando o mesmo número de dados antes e depois dele. No nosso caso, temos uma quantidade par de dados, devemos, pois, escolher os dois dados que ocupam a posição central e calcular a média aritmética entre esses dados. Procedemos do seguinte modo:

1° - Ordenamos os dados (em ordem crescente ou decrescente):

$$20{,}50-20{,}60-20{,}60-20{,}80-20{,}90-20{,}90-20{,}90-20{,}96 \quad .$$

2° - Calculamos a média aritmética dos dois termos que ocupam a posição central:

$$\frac{20{,}80+20{,}90}{2}=\frac{41{,}70}{2}=20{,}85.$$

O resultado obtido no processo corresponde ao valor procurado, ou seja, à Mediana dos tempos indicados no quadro.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentário:**

A questão não de difícil resolução, o cuidado que se deve ter é de ordenar os dados antes do cálculo da mediana para não cometer algum erro. A desatenção pode incorrer num equívoco levando a calcular a média aritmética dos dados que posição central antes de ordenar os dados, ainda mais porque a questão contém tal alternativa como resposta.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Estatística – Medidas de Tendência Central.

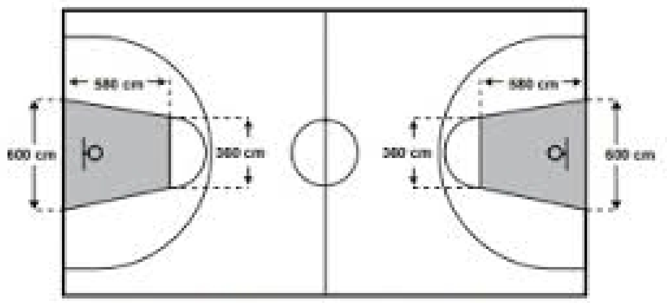
- **Nível:**

Fácil.

Questão 168

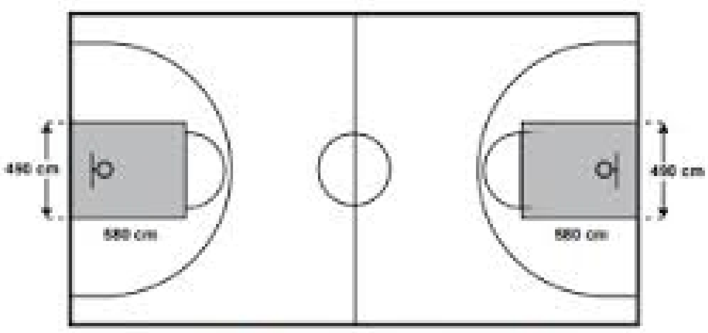
Comentários e resolução por Lucas da Silva

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (FIBA) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um (a)

a) aumento de 5800cm2.
b) aumento de 75400cm2.
c) aumento de 214600cm2.
d) diminuição de 63800cm2.
e) diminuição de 272600cm2.

- **Resolução**

Primeiramente vamos calcular a área da região delimitada do esquema I, ou seja, a área do trapézio. A área do trapézio é dada por:

$$A_{(trapézio)} = \frac{(B_{maior} + b_{menor}) \times h}{2}$$

Logo,

$$A_{(trapézio)} = \frac{(600\,cm + 360\,cm) \times 580\,cm}{2}$$

$$A_{(trapézio)} = \frac{960\,cm \times 580\,cm}{2}$$

$$A_{(trapézio)} = 480\,cm \times 580\,cm.$$

Agora vamos calcular a área da região delimitada do esquema II, ou seja, a área do retângulo. A área do retângulo é dada por:

$$A_{(retângulo)} = B_{base} \times h_{altura}$$

Logo,

$$A_{(retângulo)} = 580\,cm \times 490\,cm$$

Note que,

$$A_{(retângulo)} = 580\,cm \times (480 + 10)\,cm = (580\,cm \times 480\,cm) + (580\,cm \times 10\,cm) = A_{(trapézio)} + (580\,cm \times 10\,cm)$$

.

Portanto, a área do retângulo é maior do que a área do trapézio acrescido de $(580\,cm \times 10\,cm) = 5800\,cm^2$.

- **Resposta: alternativa (a).**

- **Comentário:**

A grande dificuldade para resolver a questão, é identificar que figura está delimitada no esquema I e recordar a fórmula para o cálculo da sua área. Ademais, a questão não requer cálculos laboriosos. Um ponto positivo que deve ser exaltado é que os dados da questão são verídicos e tem fundamentação.

Dica PET-Matemática

Coloque os dados em ordem crescente ou descrente, assim poderá já de inicio excluir algumas possibilidades. Daí, você trabalha com o menor mais próximo e o maior mais próximo.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Área de figuras planas

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 169

Resolução e comentários por Ismael Sandro da Silva

O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina
e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;

2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;

3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

a) 2.
b) 4.
c) 9.
d) 40.
e) 80.

- **Resolução:**

Analisemos os critérios para a distribuição dos ingressos indicados na questão:
Critérios:
1): *Cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;*
2): *Todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos.*
3): *Não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).*

Os dados da questão nos fornecem que ingressos serão destinados a sessão vespertina e 320 à noturna. Podemos concluir que o número de ingressos por escola deve ser um divisor comum de 400 e 320, pois cada escola, conforme os critérios estabelecidos, recebe o mesmo número de ingressos, destinados a somente a uma das sessões sem que haja sobra de ingressos.

Os dois últimos critérios nos dizem que todos os $720(400+320)$ ingressos serão entregues e que cada escola recebe o mesmo número i de ingressos, assim, representando o número de escolas por n, segue-se que

$$720=n\cdot i$$

Como queremos que o número n de escolas seja o menor possível o número i de ingressos deve ser o maior possível. Devemos, assim, ter

$$i=mdc(400,320) \quad ,$$

pois i é um divisor comum de 400 e 320. A fatoração dos números 400 e 320 é

$$400=2^4\cdot 5^2 \quad \text{e} \quad 320=2^7\cdot 5$$

Um algoritmo para determinar o valor de i é efetuar o produto das menores potências dos primos comum às fatorações de 400 e 320. Obtemos $i=2^4\cdot 5=80$ e, então,

$$n = 720/80 = 9 \quad .$$

- **Resposta: alternativa (c).**

- **Comentário:**

A questão é bem formulada, pois tem um enunciado claro e objetivo, assim como foge aos clichês de questões envolvendo mdc. Neste caso não se requer apenas o cálculo do mdc de dois números inteiros, mas sua utilização no desenvolvimento da questão. Vale ressaltar que a contextualização presente é coerente, não remetendo a uma situação artificial de ocorrência inexequível.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

O conteúdo abordado é o de mdc trabalhado no ensino fundamental.

- **Nível:**

Médio.

Questão 170

Comentários e resolução por Renato de Melo

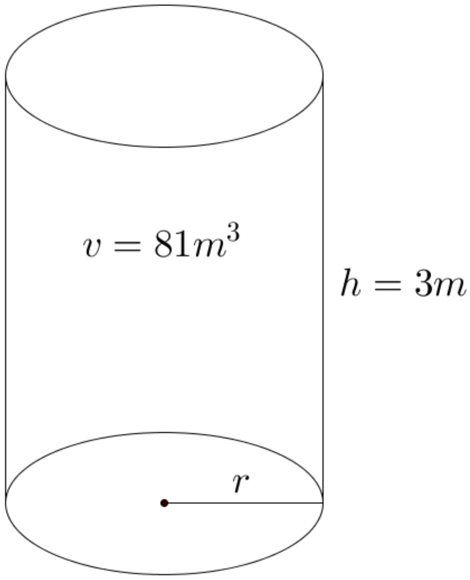
Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

- **Resolução:**

Devemos recordar a fórmula para calcularmos o volume de um cilindro:



$$v = \pi r^2 h$$
$$81 = 3 \cdot r^2 \cdot 3$$
$$r^2 = 9$$
$$r = 3m$$

Assim, o raio da nova cisterna deverá ser de 3 m.
Uma vez que o raio é a metade do diâmetro e o diâmetro da cisterna antiga é de 2 m, então o seu raio é de 1 m.

Portanto, o aumento, em metros, do raio da cistarna será

$$3m - 1m = 2m$$

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentários:**

A questão traz uma contextualização adequada, pois esses dados são, além de possíveis, comuns para a atividade descrita.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Volume de sólidos geométricos.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 171

Comentários e resolução por Artur Mendes

Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidiam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

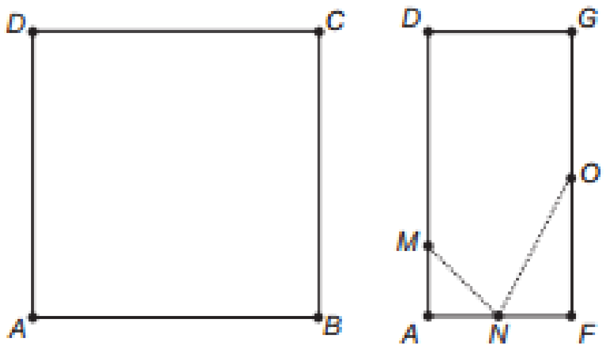
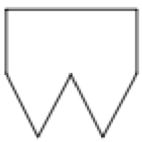


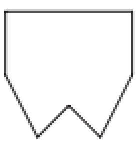
Figura 1 Figura 2

Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta.
A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é

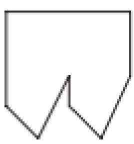
a)



b)

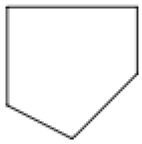


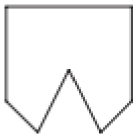
c)



d)

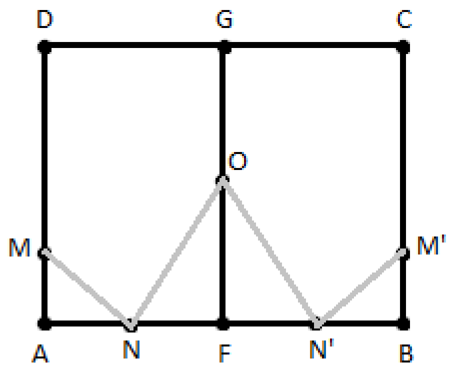
e)





- **Resolução:**

Dado que o segmento GF está centrado no meio da bandeirinha de papel e O é o ponto médio de GF, temos que os pontos A e D são simétricos de B e C, respectivamente, em relação ao segmento GF, assim, se M é um ponto em AD de modo que AM é um quarto de AD, e N é o ponto médio de FA, temos que M' e N' são os simétricos de M e N, respectivamente, ou seja, BM' é um quarto de BC e N' é o ponto médio de FB.



Observe que se traçarmos os segmentos MN, NO, ON' e N'M' (figura) coincidem com a bandeirinha da alternativa E.

- **Resposta: alternativa (e)**

- **Comentário:**

Esta é uma questão simples, pois requer apenas um pequeno esboço da figura para resolvê-la.

- **Tópicos específicos do Ensino Médio abordados na questão:**

Geometria Plana.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 172

Comentários e resolução por Caio Antony

Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam em uma sala serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chama-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%.
b) 30,0%.
c) 44,1%.
d) 65,7%.
e) 90,0%.

- **Resolução**

O fato é que existem as seguintes situações:
a) Nenhum candidato fala inglês.
b) Um candidato fala inglês e dois não falam.
c) Dois candidatos falam inglês e um não fala.
d) Todos os candidatos falam inglês.
E nós queremos encontrar a probabilidade de acontecer b), c) ou d), que pelo fato de essas três possibilidades são disjuntas, seria dado pela soma dos três. Tal resolução daria uma quantidade enorme de trabalho, o que não é o objetivo

Uma solução muito mais simples é descobrir a chance probabilidade de acontecer a), que chamaremos de $P(a)$, e então calcular a probabilidade de não acontecer i), ou seja,

$$P'(a)=1-P(a) \quad .$$

Dica PET-Matemática

No estudo da probabilidade, vê-se que a probabilidade máxima de algo acontecer é de 100%.
Nesse caso, se o aluno suspeitasse que a probabilidade do evento ocorrer era de $3\cdot 30=90$, o mesmo raciocínio chegaria que a probabilidade de que ao menos uma entre 4 pessoas falasse inglês seria de $4\cdot 30=120$, o que é impossível.
Sempre que você calcular uma probabilidade que seja negativa ou mais do que 100%, algo está errado!

Como a chance de um aluno não falar inglês é de 70%, ou 0,7, e a probabilidade de um aluno falar inglês é independente da probabilidade de um outro falar inglês, temos que $P(a)$ é dado pelo produto das probabilidades de cada não falar inglês, ou seja:

$$P(a)=0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}343$$

De onde

$$P'(a)=1-P(a)=1-0{,}343=0{,}657=65{,}7$$

Essa questão pode pegar de surpresa os candidatos que não estão acostumados com probabilidade, pois o mais intuitivo seria fazer $3 \cdot 30 = 90$ e marcar a alternativa D. Um outro candidato, um pouco mais acostumado com probabilidade e ciente da dica PET dada nessa questão, poderia estranhar o valor alto.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentário**

Uma questão muito bem elaborada, que cobra um conteúdo importante para praticamente qualquer área que o candidato vá seguir, envolvendo uma boa contextualização e algumas pegadinhas. Apesar de aparentemente trabalhosa, os cálculos apresentados são simples, que sequer é necessário que sejam feitos com exatidão, uma vez que uma simples aproximação dos resultados levaria à resposta correta. O nível da questão é bom, separando os alunos medianos dos bons alunos.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Probabilidade.

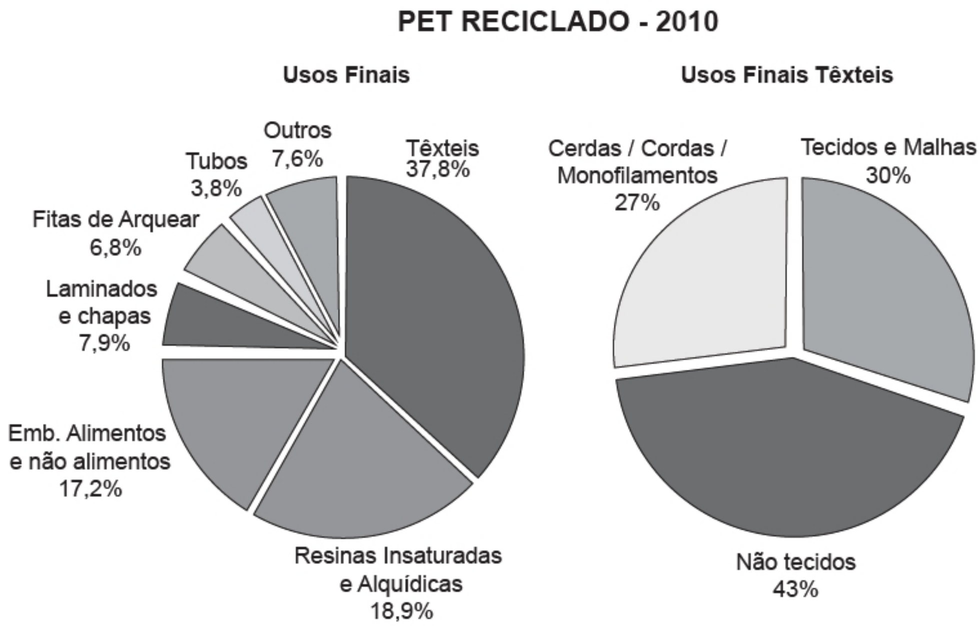
- **Nível da questão**

Médio.

Questão 173

Resolução e comentário por Lucas Siebra

O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

a) 16,0.
b) 22,9.
c) 32,0.
d) 84,6.
e) 106,6.

- **Resolução**

Para obtermos o resultado da questão, basta calcularmos a quantidade de embalagens PET destinadas ao uso têxtil para, em seguida, calcularmos a quantidade para uso final têxtil de tecidos e malhas. Ou seja,

$$\text{Quant. têxtil} = 37{,}8\% \cdot 282$$

e

Dica PET-Matemática

Geralmente em questões do ENEM, há uma saída para "cálculos grandes". Nesse caso, foi possível obter a resposta a partir de um arredondamento, já que a questão pede uma aproximação.

Quant. tecidos e malhas = 30% · Quant. têxtil.

Daí,

$$Quant.\ tecidos\ e\ malhas = \frac{30}{100} \cdot \frac{37{,}8}{100} \cdot 282 \ .$$

É notável que caso fôssemos fazer todas as multiplicações e divisões, demandaria muito tempo. Então, por simplicidade de cálculos, podemos escrever a equação acima como

$$Quant.\ tecidos\ e\ malhas = \frac{30}{10} \cdot \frac{282}{100} \cdot \frac{37{,}8}{10}$$

$$Quant.\ tecidos\ e\ malhas = 3 \cdot 2{,}82 \cdot 3{,}78 \ \cdot$$

Daí, caso arredondássemos as parcelas, já que é pedido uma aproximação na questão:

$$Quant.\ tecidos\ e\ malhas = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36 \ .$$

Ou seja, a resposta abaixo, e próxima, de 36. Como a alternativa que atende a isso, concluímos que

$$Quant.\ tecidos\ e\ malhas = 32 \ \text{kton.}$$

- **Resposta: alternativa (c)**

- **Comentário**

Apesar de ser uma questão que aborda apenas o conteúdo de porcentagem, ela demanda cálculos laboriosos. Por isso, deve-se buscar a melhor maneira de analisar as possíveis respostas e assim, notar quais alternativas “fazem mais sentido” para a questão.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Análise de gráficos e manipulações algébricas simples

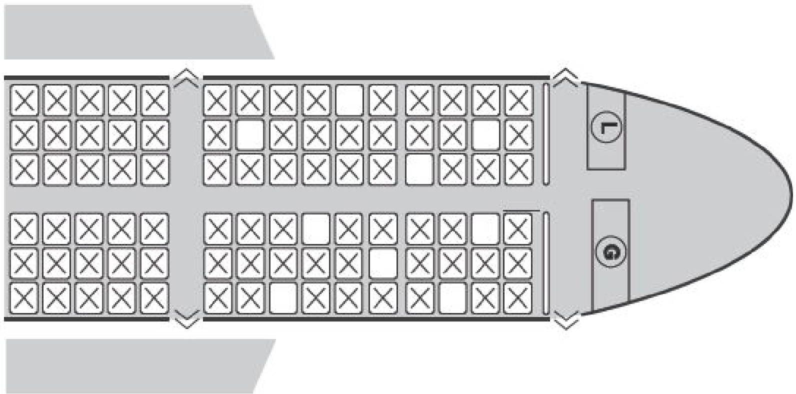
- **Nível da questão**

Fácil.

Questão 174

Resolução e comentário por Fábio Monteiro da Silva

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$

c) $7!$

c) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

- **Resolução**

Pelas informações do enunciado devemos alocar as 7 pessoas em 9 lugares. O número de maneiras distintas de se fazer isso é dada pela combinação de 9 elementos tomados 7 a 7, ou seja: $C_7^9 = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!2!}$

Atenção! Observe que para cada maneira que se escolhe alocar as pessoas podemos permutar as 7 pessoas da família de seus respectivos lugares, logo:

Total de Possibilidades $\frac{9!}{7!2!}\times 7! = \frac{9!}{2!}$.

- **Resposta: alternativa (a)**

- **Comentário:**

A questão aborda conhecimentos da teoria da contagem, mais especificamente do conteúdo "Análise Combinatória". Não requer muito esforço, mas é preciso que o aluno tenha um certo domínio do conteúdo. Além disso, é preciso muita atenção ao fato de que para cada maneira que se escolhe alocar as pessoas temos que considerar a permutação dos elementos, no nosso problema isso consiste nas pessoas mudarem de lugar.

Dica PET-Matemática

Achou essa resolução difícil? Não lembra da fórmula? Não se preocupe, basta pensar o seguinte: Devo alocar 7 pessoas em 9 lugares. Veja que para a primeira pessoa estão disponíveis os 9 lugares, para a segunda estão disponíveis 8 lugares, para a terceira estão disponíveis 7 lugares e continuando assim, temos que para a sétima pessoa ainda posso escolher entre três lugares vazios. Pelo Princípio multiplicativo isso equivale a:
$9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}{2}=\frac{9!}{2!}$, que é o resultado que encontramos acima.
Ps: Agradeço ao Rodrigo por essa valiosa sugestão.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Análise Combinatória.

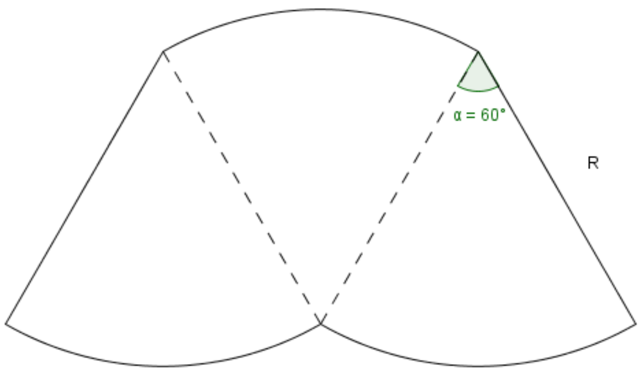
- **Nível:**

Médio.

Questão 175

Comentários e resolução por Otacilia Meira

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

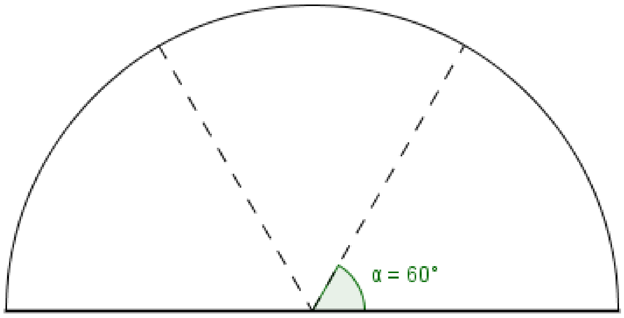
Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

a) 16
b) 28
c) 29
d) 31
e) 49

- **Resolução**

Primeiramente, observe que, se reorganizarmos a figura dada na questão, teremos um semicírculo. Veja



A área A da piscina nova te que ser menor que a existente, que tem formato retangular e dimensões $50\,x\,24$ e área

$$A\,retângulo = 50\,x\,24 = 1\,200\,m$$

A área da nova piscina será

$$Aretângulo > A$$

$$1200\,m > \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

Substituindo os valores

$$1200 > \frac{3 \cdot R^2}{2} \quad 400 > \frac{R^2}{2} \quad 800 > R^2 \quad 20\sqrt{2} > R \quad 20 \cdot 1{,}4 > R \quad 28 > R$$

Como $R^2 < 800$ assumiremos $R = 28$ já que $28^2 < 800 < 29^2$ $\cdot$.

- **Comentário:**

Uma questão que exige uma boa interpretação de seu contexto e que dependendo do caminho tomado o aluno poderá errar a questão.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Área e Inequações.

- **Nível da Questão:**

Médio.

Questão 176

Comentários e Resolução por Renato de Melo

Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as dez horas que antecedem um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

Garrafa I: 0,15 litro
Garrafa II: 0,30 litro
Garrafa III: 0,75 litro
Garrafa IV: 1,50 litro
Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

- **Resolução:**

Uma estratégia possível para resolução desta questão é, em primeiro lugar saber quanta água a paciente deverá consumir durante as 10 horas e depois dividir o resultado por 2, já que são duas garrafas iguais.

Em uma hora, a paciente consumirá 2 copos de água e, assim, em dez horas, ela consumirá 2 x 10 = 20 copos de água. Como cada copo tem 150 ml de água, então o total de água consumida será de

$$20 \text{ copos} \times 150 \text{ ml} = 3000 \text{ ml}$$

Como esta questão traz valores em litros para as garrafas, transformando ml em l, obtemos

$$3000 \text{ ml} = 3 \text{ l}$$

E assim, a paciente consumirá em dez horas, 3 litros de água.

Continuando com a nossa estratégia de resolução, para obtermos a quantidade de água que uma garrafa deve comportar para que atenda a recomendação médica e consuma todo o conteúdo, o próximo passo é dividir o valor obtido por 2, obtendo

$$3 \text{ litros} / 2 = 1{,}50 \text{ litros de água por garrafa.}$$

Assim, o paciente deverá escolher a garrafa IV, que comporta 1,50 litros de água.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentário:**

A contextualização nesta questão é razoável e, por isso, adequada, pois trouxe uma situação de otimização possível na vida real, que aborda manipulação de unidades de medida e manipulações simples.

- **Tópico do Ensino Médio abordado na questão:**

Manipulação de unidades de medida.

- **Nível da questão:**

Fácil.

Questão 177

Comentários e resolução por Caio Antony

Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

- **Resolução**

Temos a média das quatros primeiras notas e a quinta nota, e queremos saber as médias das cinco notas dos candidatos. Assim, façamos as médias ponderadas:

- Candidato A:

$$M_A = \frac{4\cdot 90+60}{5} = 84.$$

- Candidato B:

$$M_B = \frac{4\cdot 85+85}{5} = 85.$$

- Candidato C:

$$M_C = \frac{4\cdot 80+95}{5} = 83.$$

- Candidato D:

$$M_D = \frac{4\cdot 60+90}{5} = 66.$$

- Candidato E:

$$M_E = \frac{4\cdot 60+100}{5} = 68.$$

Dica PET-Matemática

Note que nem todas essas contas precisam ser feitas. De fato, os candidatos D e E são claramente os dois últimos, e é fácil ver que E está na frente de D. Ainda, a média ponderada de B nos dá

$$M_B = \frac{5\cdot 85}{5} = 85.$$

Assim, vemos que a ordem procurada é B, A, C, E, D, que nos dá a alternativa B.

- **Resposta: alternativa (b)**

- **Comentário**

Uma questão pouco relevante, que contém uma pegadinha (não do tipo que tira a questão de candidatos que não sabem do conteúdo, mas sim que não estão atentos), muitos cálculos e um assunto simples demais para ser cobrado sozinho.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão**

Média ponderada.

- **Nível da questão**

Fácil.

Questão 178

Comentários e resolução por Artur Mendes

O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu calculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m², ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m² de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

a) 10,8.
b) 12,0.
c) 32,4.
d) 108,0.
e) 324,0.

- **Resolução:**

Para resolver esta questão, é preciso conhecer os volumes do cilindro e do cubo. Observe também que algumas medidas estão em metros quadrados, precisamos convertê-las para milímetros quadrados para encontrarmos o volume acumulado na lata de formato cilíndrico e depois igualarmos ao volume do cubo.

Sendo o volume do recipiente (V) igual à área da base (A) vezes a altura (h),

$$V = A \cdot h \quad ,$$

e sabendo que a área da base de um cilindro é um círculo, temos que

$$V_{cílindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad .$$

Aplicando os dados da questão, raio 300 mm ($3 \cdot 10^2$ mm) e altura 1200 mm ($12 \cdot 10^2$ mm), na fórmula do volume do cilindro, e considerando $\pi = 3$,

$$V_{cilindro} = 3 \cdot (3 \cdot 10^2)^2 \cdot 12 \cdot 10^2$$

$$V_{cilindro} = 3 \cdot 3^2 \cdot 10^4 \cdot 12 \cdot 10^2$$

$$V_{cilindro} = 3^3 \cdot 12 \cdot 10^6 \quad .$$

Encontramos o volume da lata, mas o volume de água acumulada no recipiente é de apenas 1 terço do valor total da lata. Logo,

$$V_{acumulado}=\frac{3^3\cdot 12\cdot 10^6}{3}$$

$$V_{acumulado}=3^2\cdot 12\cdot 10^6$$

$$V_{acumulado}=108\cdot 10^6 \quad .$$

Encontrado o volume de água acumulada, vamos passar para o recipiente cúbico. Observe que a unidade de medida do volume encontrado é milímetros cúbicos, e a área do recipiente cúbico é dado em metros quadrados. Para converter de metros para milímetros basta multiplicarmos por 10^3. Daí,

$$1\,m=10^3 mm$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$(1\,m)^2=(10^3 mm)^2=10^6 mm^2.$$

Agora, igualando a equação do volume acumulado com a equação do volume do recipiente cúbico,

$$V_{Cubo}=V_{acumulado}$$

Sendo,

$$V_{Cubo}=A\cdot h$$

$$V_{Cubo}=10^6\cdot h$$

Temos,

$$10^6\cdot h=108\cdot 10^6$$

Dividindo ambos os membros da equação por 10^6

$$h=108 \quad \text{mm}$$

Como a altura do recipiente cúbico define o índice pluviométrico da região, então temos como a resposta da questão a alternativa (D), 108 mm.

- **Resposta: alternativa (d)**

- **Comentário:**

Essa é uma boa questão, envolve unidades de medida, área e volume, o candidato que não dominar algum destes três conteúdos provavelmente não obterá êxito na questão.

- **Tópicos específicos do Ensino Médio abordados na questão:**

Áreas e Volumes.

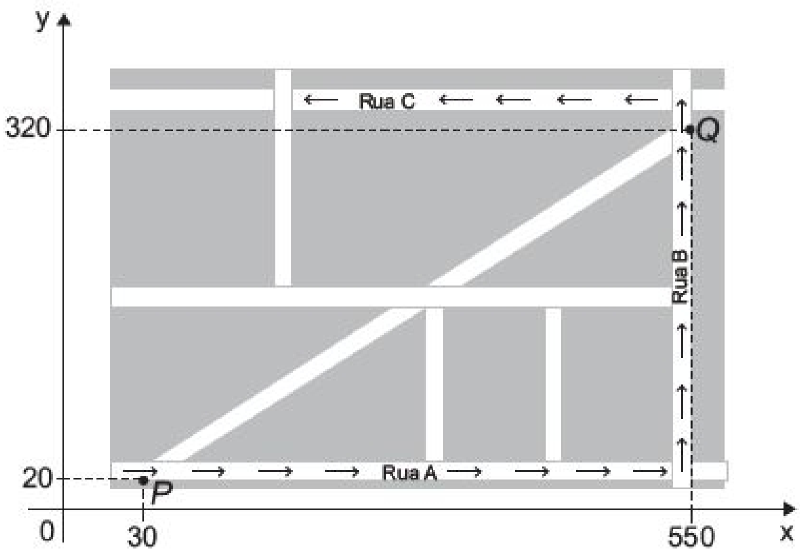
- **Nível da questão:**

Médio.

Questão 179

Resolução e comentário por Fábio Monteiro da Silva

Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) $(290;20)$.
b) $(410;0)$.
c) $(410;20)$.
d) $(440;0)$.
e) $(440;20)$.

- **Resolução:**

Observe que entre os pontos P e Q tem-se uma distância horizontal de $550-30=520$ e uma distância vertical de $320-20=300$. Logo, a distância entre os pontos é de $520+300=820$. Como a distância entre P e Q é de 820, tem-se que a distância entre P e T deve ser a metade desse valor, logo $\frac{820}{2}=410$. Concluímos que o ponto T só pode está localizado na rua A (Veja a figura do enunciado), logo suas coordenadas são T = (410 + 30 ; 20) = (440 ; 20).

- **Resposta: alternativa (e)**

- **Comentário:**

Questão bem elaborada e que exige do aluno leitura e interpretação de informações sem maiores dificuldades de resolução.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado:**

Os conceitos trabalhados são coordenadas no plano cartesiano e distância, conteúdos do ensino fundamental.

- **Nível:**

Fácil.

Questão 180

Comentários e resolução por Lucas da Silva

Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

a) 2,099.
b) 2,96.
c) 3,021.
d) 3,07.
e) 3,10.

- **Resolução:**

Dica PET-Matemática

Coloque os dados em ordem crescente ou descrente, assim poderá já de inicio excluir algumas possibilidades.

Inicialmente vamos observar que $3{,}10>3{,}07>3{,}021>3{,}0>2{,}96>2{,}099$. Assim os valores mais próximos de 3,0 mm são $3{,}021\,mm$ e $2{,}96\,mm$. Agora dentre os dois devemos escolher qual está mais próximo de 3,0 mm . Note que,

$$3{,}021\,mm=3{,}0\,mm+0{,}021\,mm$$

e

$$3{,}0\,mm=2{,}96\,mm+0{,}04\,mm$$

Como $0{,}021\,mm<0{,}04\,mm$ temos que 3,021 mm está mais próximo de 3,0 mm .

- **Resposta: alternativa (c).**

- **Comentário:**

Nota-se a questão é simples, não requer cálculos laboriosos para sua resolução. Entretanto, a mesma deixa a desejar quando se refere a conteúdos especifico do ensino médio. Pois conforme foi visto acima, sua resolução se deu sem trabalhar com nenhum conteúdo proposto no ensino Médio.

- **Tópico específico do Ensino Médio abordado na questão:**

Nenhum específico, apenas comparação entre números na notação decimal.

- **Nível da questão:**

Fácil.