

Universidade Federal
de Campina Grande

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

GRUPO PET – MATEMÁTICA – UFCG

Espaços de Hilbert

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer

Discente: Jonas Barros Lima de Medeiros

CAMPINA GRANDE

Novembro/2021

TÍTULO: Espaços de Hilbert.

INTRODUÇÃO: O estudo de Álgebra Linear na graduação tem como objetivo imediato dar base para discentes trabalharem com cálculo de funções de várias variáveis e EDO's. Este segundo tema é empregado no estudo de fenômenos físicos simples, como problemas de misturas, sistema massa mola e propagação de calor em uma dimensão. Para problemas físicos mais complicados, é necessário que se use matemática mais robusta. Neste sentido, a Análise Funcional aparece como uma ferramenta tanto versátil quanto poderosa. Além disso, é, sob certo ponto de vista, a escolha natural quando o desejo é prosseguir estudos iniciados com Álgebra Linear. Dito isto, o objetivo deste projeto é trabalhar a teoria geral de Espaços de Hilbert, passando pelos espaços de Banach, Teoremas de Hahn-Banach, chegando até o Teorema de Lax-Milgram, o que nos vai permitir garantir existência e unicidade de equações diferenciais parciais como:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned}$$

sob algumas hipóteses técnicas. Além disso, dentro da teoria geral, iremos ver conceitos de gráfico fechado, aplicação aberta e topologias fracas.

OBJETIVOS GERAIS

- Treinar o aluno para ter melhor desempenho em futuras disciplinas de pós-graduação que tenham semelhança com a área estudada.
- Reforçar/revisar tópicos da Álgebra Linear que servirão como apoio para o conteúdo tema da Iniciação Científica.
- Motivar a discente para o estudo das áreas referentes a Álgebra Linear e Análise Funcional.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Discutir as definições e resultados clássicos sobre essa teoria.
- Estudar os Espaços de Hilbert.

JUSTIFICATIVA DA PESQUISA:

Do fato que a primeira referência foi cumprida, que visava revisar/fortalecer tópicos da Álgebra Linear, nesta Iniciação Científica, percebemos a importância da revisão de alguns tópicos relacionados à disciplina de Análise Real que irão servir também como base para o estudo principal do presente trabalho.

Depois de revisados esses tópicos, visamos abordar os resultados mais clássicos/importantes referentes a teoria geral dos Espaços de Hilbert. Desse modo, proporcionaremos uma brecha para que o aluno possa conhecer as áreas relacionadas a Álgebra Linear, Análise Real e Análise Funcional podendo, assim, se aprofundar nas mesmas futuramente.

Além disso, sabendo da importância e das oportunidades que o estudo de línguas estrangeiras proporciona para a pesquisa e o aprendizado Matemático, para o estudo da Análise Funcional, estudaremos a referência em inglês, que se trata do livro do autor Haim Brezis, intitulado *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; além desta, como leitura auxiliar, usaremos *Introductory Functional Analysis, with applications*, de E. Kreyszig.

PROGRAMA DE ESTUDO:

Seguindo o livro intitulado: *Curso de Análise*, do autor Elon Lages, pretendemos estudar os seguintes tópicos de Análise Real:

- 1) Sequência de Números Reais
 - Sequências;
 - Limite de uma sequência;
 - Propriedades aritméticas dos limites;
 - Subsequências;
 - Sequências de Cauchy;
 - Limites infinitos.
- 2) Séries de Números Reais
 - Série numéricas.
- 3) Topologia da Reta
 - Conjuntos abertos;
 - Conjuntos fechados;
 - Pontos de acumulação;
 - Conjuntos compactos.
- 4) Limite de Funções
 - Definição e propriedades do limite;
 - Exemplos de limites;

- Limites laterais;
- Limites no infinito e limites infinitos.

5) Funções Contínuas

- A noção de função contínua;
- Descontinuidades;
- Funções contínuas em intervalos;
- Continuidade uniforme.

Além desses tópicos de Análise Real, tendo em vista o livro intitulado: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, do autor Haim Brezis, pretendemos estudar os seguintes tópicos de Análise Funcional:

6) The Hahn-Banach Theorems. Introduction to the Theory of Conjugate Convex Functions

- The Analytic Form of the Hahn-Banach Theorem: Extension of Linear Functionals
- The Bidual E^{**} . Orthogonality Relations.

7) Weak Topologies. Reflexive Spaces. Separable Spaces. Uniform Convexity

- The Coarsest Topology for Which a Collection of Maps Becomes Continuous;
- Separable Spaces.

8) Hilbert Spaces

- Definitions and elementary Properties, Projection onto a Closed Convex Set;
- The Theorems of Stampacchia and Lax-Milgram.

METODOLOGIA:

Visando cumprir toda programação prevista para o ano de 2021, realizaremos as exposições para o desenvolvimento da Iniciação Científica pela Plataforma do Google Meet (devido a pandemia da covid-19).

Com objetivo de aperfeiçoar o uso de ferramentas voltadas para o ensino e propagação da Matemática, o orientado irá expor os materiais feitos por ele por meio de um compilado promovido pelo Software Latex, que é um programa com alta qualidade tipográfica voltado à digitação de textos científicos.

Por fim, objetivando um melhor rendimento do aluno, as apresentações serão acompanhadas de discussões e problemas referentes aos conteúdos, propostos pelo orientador, deixando assim os temas previstos para serem estudados mais interessantes e didático.

CRONOGRAMA:

Fevereiro e março (2021) – Estudo dos tópicos 1 e 2

Abril e maio (2021) – Estudo do tópico 3

Junho e julho de (2021) – Estudo do tópico 4

Agosto de (2021) – Estudo do tópico 5

Setembro de (2021) – Feitura de exercícios de revisão

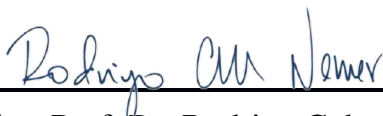
Outubro de (2021) – Estudo do tópico 6

Novembro de (2021) - Estudo do tópico 7

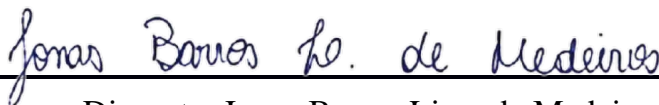
Dezembro de (2021) – Estudo do tópico 8

BIBLIOGRAFIA

1. BREZIS, Haim. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. United States of America: Springer, 2011.
2. KREYZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. United States of America: Jhon Wiley & Sons, 1978.
3. LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 6º ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
4. LANG, Serge. **Álgebra Linear**. 3º ed. Rio De Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003.
5. LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 7º ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.



Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer



Discente: Jonas Barros Lima de Medeiros

Visto Do Tutor:

