

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Centro de Ciências e Tecnologia – CCT

Unidade Acadêmica de Matemática – UAMat

Programa de Educação Tutorial – PET

Estudo de Alguns Elementos da Topologia Geral

Discente: Otacilia Meira de Freitas Neta

Orientador: Prof. Dr. Romildo Nascimento de Lima

Campina Grande/PB

Setembro/2018

Título: Estudo de Alguns Elementos da Topologia Geral.

Introdução

Dentro da Matemática, a Topologia têm um papel extremamente relevante na ligação e interação com todas as subáreas da Matemática. Trata-se de uma ferramenta indispensável ao estudo dos mais diversos ramos da Matemática.

A Topologia Geral, define e estuda propriedades dos espaços topológicos como conexidade e compacidade. Além disto, a Topologia Geral classifica aplicações entre espaços topológicos por meio de termos como continuidade, homeomorfismos e aplicações próprias.

Desta forma, a motivação para este projeto surgiu na busca por compreender de forma abrangente alguns fenômenos matemáticos que são modelados pela Topologia Geral.

Objetivo

Introduzir os principais conceitos da Topologia Geral, a partir do estudo dos Espaços Métricos. Os pré-requisitos são basicamente os cursos de Cálculo Diferencial e Integral, além de conhecimento básico sobre conjuntos. Ademais, constituem uma vertente mais aprofundada e geral de alguns tópicos estudados na graduação.

Justificativa da Pesquisa

A Topologia conecta as mais diversas áreas da Matemática. Através do estudo das relações entre espaços topológicos é possível descrever, analisar, tirar conclusões sobre uma determinada grandeza em estudo. Assim, é de vital importância que tenhamos sempre estudantes da Matemática com conhecimento profundo sobre a natureza dos espaços envolvidos na Matemática.

Referencial Teórico

A palavra topologia foi oficialmente usada pela primeira vez por [Johann Benedict Listing](#) em 1847 no artigo *Vorstudien zur Topologie*, *Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, pp. 67, 1848*. Entretanto Listing já vinha usando tal termo há pelo menos 10 anos, em suas correspondências. O termo "topology" (Topologia em inglês) foi introduzido muitos anos mais tarde na revista *Nature* em um artigo de 1883 com a finalidade de "distinguir a geometria qualitativa da geometria comum onde os aspectos qualitativos são primariamente estudados".

No entanto, a resolução do problema das sete pontes de Königsberg por [Leonard Euler](#) em 1736 é considerada como sendo um dos primeiros resultados topológicos. Este é um exemplo de problema que liga diferentes áreas da matemática, neste caso a topologia com a teoria dos grafos.

O estudo dos espaços de funções, realizados por matemáticos notáveis como Georg Cantor, Vito Volterra, Cesare Arzelà, Jacques Hadamard, entre outros, culmina com o trabalho de Maurice Fréchet, que introduziu a noção de espaço métrico, muitas de suas características lembrando o \mathbb{R}^N . Atualmente, os espaços métricos são considerados casos específicos, mas muito importantes, de uma classe mais geral conhecida como espaços topológicos.

A formalização do conceito de espaço topológico é devida a [Felix Hausdorff](#) que definiu em 1914 o que hoje é conhecido como espaço de Hausdorff. O conceito final de espaço topológico é um pouco mais geral que o conceito de espaço de Hausdorff e foi introduzido posteriormente por [Kazimierz Kuratowski](#) em 1922.

Metodologia

O programa será desenvolvido através de seminários semanais onde o aluno apresentará todo o conteúdo ao professor. Nestes seminários, orientador e orientando debaterão sobre um assunto previamente determinado, com isto o professor avaliará melhor o andamento do programa.

Plano de Trabalho e Cronograma de Atividades

Esperamos que ao longo do tempo, o aluno desenvolva os seus estudos individuais e em conjunto com o orientador de forma que o seguinte cronograma de estudo seja realizado:

Em 2018:

- **Outubro:** Topologia do Espaço Euclidiano.
- **Novembro:** Topologia do Espaço Euclidiano.
- **Dezembro:** Espaços Métricos.

Em 2019:

- **Fevereiro:** Funções Contínuas.
- **Março:** Espaços Topológicos.
- **Abril:** Limite e Continuidade Uniforme.
- **Maior:** Espaços Métricos Completos.
- **Junho:** Espaços Compactos.
- **Julho:** Base Enumerável e Metrizarabilidade.
- **Agosto:** Produtos Cartesianos Infinitos e Espaços de Funções.
- **Setembro:** Extensão de Funções Reais Contínuas.

Os materiais utilizados para a elaboração dos seminários, serão os livros citados na bibliografia. O conteúdo programático dos seminários são os citados abaixo:

1. Topologia do Espaço Euclidiano

- Espaço Vetorial \mathbb{R}^n ;
- Produto interno e norma;
- Bolas e Conjuntos Limitados;
- Sequências no espaço euclidiano;
- Conjuntos Abertos;
- Conjuntos Fechados;

- Conjuntos compactos;
- Conexidade.

2. Espaço Métricos

- Definição de Espaço Métrico;
- Exemplos;
- Conjunto aberto;
- Conjunto fechado;
- Pontos de acumulação;

3. Funções Contínuas

- Definição e exemplos;
- Propriedades Elementares das Funções Contínuas;
- Homeomorfismo;
- Métricas Equivalentes.

4. Limites e Continuidade Uniforme

- Definição e exemplos;
- Limite de sequência;
- Topologia e Convergência;
- Sequência de funções;
- Continuidade uniforme.

5. Espaços Métricos Completos

- Sequência de Cauchy;
- Espaços Completos;
- Completamento de um Espaço Métrico;
- Espaços de Baire;

- Método das aproximações sucessivas.

6. Espaços Compactos

- Definição e Propriedades Gerais;
- Espaços compactos;
- Espaços Localmente Compactos.

7. Base Enumerável e Metrizabilidade

- Espaços com Base Enumerável;
- O cubo de Hilbert;
- Teorema de Metrização de Urysohn.

8. Produtos Cartesianos Infinitos e Espaços de Funções

- Metrização do Produto Cartesiano;
- Propriedades gerais do Produto Cartesiano;
- Convergência uniforme numa família de partes;
- Equicontinuidade;
- O Teorema de Ascoli;

9. Extensão de Funções Reais Contínuas

- O Teorema de Extensão de Tietze;
- A compacidade de Stone-Cech.

Bibliografia Básica:

- BARTLE, R. G. Elementos de Análise Real, Rio de Janeiro: Campus, 1983.
- DOMINGUES, H. H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia, São Paulo: Atual, 1982.
- KÜHLKAMP, N. Introdução à Topologia Geral, 2ª Ed. Florianópolis: Ed. Da UFSC, 2002.
- LIMA, E. L. Elementos de Topologia Geral, 3ª Ed. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2009.
- LIMA, E. L. Espaços Métricos, 4ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- MENDELSON, B. Introduction to Topology, 3ª Ed. New York: Dover, 1990.
- SUTHERLAND, W. A. Introduction to Metric & Topological Spaces, 2ª Ed. New York: Oxford University Press, 2009.