



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA

CURSO DE MATEMÁTICA

GRUPO PET MATEMÁTICA UFCG

ORIENTADOR: Fábio Reis dos Santos

DISCENTE: Lucas Siebra Rocha



# **Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma introdução as Geometrias Euclidiana e Afim**

Campina Grande

01/08/16

## INTRODUÇÃO

As pesquisas em Geometria Diferencial, nas últimas décadas, têm vivido um enorme desenvolvimento devido a sua extensa aplicabilidade em diversas áreas da ciência. Destacamos a influência desta área na modelagem e resolução de problemas advindos da Física-Matemática tais como: equações de Einstein, teoria de buracos negros, relatividade geral dentre outros.

Podemos modelar os objetos geométricos diversas maneiras: parametrização por funções diferenciais, conjuntos de pontos satisfazendo um sistema de equações, amostragem de parâmetros dentro de classes de formas, interpolação dentro de imagens no computador dentre outras. Cada um destes contextos pode facilitar ou dificultar o uso de certas geometrias: descritiva, diferencial, integral ou discreta.

Classificar ou reconhecer objetos geométricos é usualmente feito através do cálculo de invariantes, sendo essas medidas as ferramentas geométricas do contexto. Porém, quando se for tentar reconhecer que uma superfície discreta faz parte de uma classe (por exemplo, de superfícies mínimas), é necessário estimar invariantes discretos comparáveis aos invariantes da geometria diferencial.

Isso é uma tarefa difícil nesta diversidade de contextos, mas tem muitas aplicações, pois ajuda a complementar o processamento de imagens e a modelagem assistida por computador com os conhecimentos da geometria diferencial.

A aproximação de medidas invariantes de forma calculável no computador e numericamente estável já apresenta alguns desafios. Precisa-se ainda mostrar que essas medidas convergem para invariantes diferenciais. Finalmente, garantir que cada estimador seja também invariante e que, portanto preserve sua característica geométrica torna o problema mais sutil e interessante.

### 1. OBJETIVOS GERAIS

Nesta Iniciação Científica, serão apresentadas algumas definições de invariantes usuais tanto no contexto da geometria diferencial bem como no contexto discreto. O enfoque desta iniciação serão feitas, inicialmente, no plano e superfícies no espaço tridimensional. Logo após, serão abordadas as temáticas de Geometria Afim.

#### 1.1 Objetivos Específicos:

- Qualificar o aluno para continuar seus estudos futuros em um curso de pós-graduação visando dar continuidade as suas pesquisas iniciais e sua formação acadêmica.

- Introduzir o aluno à teoria dos invariantes geométricos como instrumento central para uma abordagem de geometrias mais abstratas.

## **2. METODOLOGIA**

Para atingirmos os objetivos que almejamos, serão realizadas exposições semanais pelo aluno na presença do orientador. Terão também discussões e resoluções de exercícios propostos a fim de fixar os conceitos e resultados introduzidos. No decorrer do projeto, o aluno fará leitura de textos complementares para ampliar seus conhecimentos e dar suporte ao andamento do projeto.

Além disso, vamos direcionar o aluno para que participe de encontros científicos envolvendo os temas de nosso estudo, bem como motivar sua participação em Curso de Verão em programas de pós-graduação em Matemática para que consiga um maior embasamento teórico para iniciá-la um curso de mestrado.

## **3. CRONOGRAMA DE EXECUÇÃO**

Evidentemente, a viabilidade da proposta é factível uma vez que se trata de um estudo de temas básicos que são estudados por pesquisadores na área de Geometria no início de sua formação acadêmica.

No que segue, são apresentados temas e assuntos detalhados que o aluno terá que estudar para atingir as metas desejadas. Pretendemos executar este estudo em duas etapas:

### **Etapa 1: Geometria Euclidiana (Setembro de 2016 – Março de 2017)**

#### **1.1: Curvas**

- Modelos Euclidianos de Curvas;
  - Curvas Paramétricas Regulares;
  - Curvas Implícitas;
  - Curvas Poligonais;
- Mudança de Contexto;
- Comprimento de Arco;
- Vetor Tangente; Vetor Normal;
- Curvatura;
- Fórmula de Minkowski;

#### **1.2: Superfícies**

- Modelos Euclidianos de Superfícies;
  - Superfície Paramétricas Regulares;
  - Superfície Implícitas;
  - Complexos Simpliciais;
- Mudança de Contexto;

- Plano Tangente; Vetor Normal
- Primeira Forma Fundamental
  - Comprimento de Curva na Superfície;
  - Área de uma Região em uma Superfície;
- Segunda Forma Fundamental;
  - Aplicação Normal de Gauss;
  - Curvatura;
  - Cálculo das Curvaturas;
  - Fórmula de Minkowski.

## **Etapa 2: Geometria Afim. (Março de 2017 – Setembro de 2018)**

### **2.1: Curvas**

- Invariância Afim;
- Modelos de Curvas;
- Curvas Paramétricas;
  - Comprimento de Arco Afim;
  - Vetores Tangente e Normal Afins;
  - Curvatura Afim;
  - Gráfico;
  - Estimadores a partir do Polígono Parabólico;
- Curvas Implícitas;
  - Exemplos Fundamentais;
  - Simplificação: Transformação A;
  - Fórmulas Simplificadas.

### **2.2: Superfícies**

- Estrutura Afim;
- Superfícies Parametrizadas:
  - Curvas Assintóticas;
  - Primeira Forma Fundamental Afim;
  - Vetores Co-normal e Normal Afins;
  - Curvaturas Afins;
  - Gráfico;
- Interpretação Geométrica:
  - Fórmula de Minkowski Afim.
- Cúbica Osculadora;
- Superfícies Implícitas:
  - Métrica Afim;
  - Co-normal Afim e Normal Afim;
  - Curvaturas Afins;
  - Exemplos Fundamentais;
  - Redução Geométrica e Fórmulas Simplificadas.
- Mudança de Contexto.

## 5. BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

- Andrade, Maria e Lewiner, Thomas: ***Cálculo e Estimação de Invariantes Geométricos: Uma Introdução as Geometrias Euclidiana e Afim.*** 28º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2011.
- CARMO, Manfredo Perdigão do: ***Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.*** Sociedade Brasileira de Matemática; Rio de Janeiro, 2015.
- Tenenblat, Keti: ***Introdução à Geometria Diferencial.*** Editora Blucher, 2008.
- LIMA, Elon Lages: ***Curso de Análise - Volume 2.*** Rio de Janeiro, Projeto Euclides-IMPA 1981.
- LIMA, Elon Lages: ***Espaços Métricos.*** Projeto Euclides, IMPA, CNPq . Rio de Janeiro, 1977.