Área de Publicação: Matemática aplicada

O QUE AS AGULHAS PODEM FALAR SOBRE PI, UM TUMOR E SOBRE UMA BACIA HIDROGRÁFICA? DUAS APLICAÇÕES DA PROBABILIDADE

SILVA, Rodrigo Marques Faustino da[1]**;** OLIVEIRA**,** Lucas Hariel Cavalcanti de[2]; DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro [3]

[1]Matemática – UFCG; rodriigosilv@gmail.com:
[2]Matemática – UFCG
[3]Matemática – UFCG

RESUMO

Na matemática, são formuladas diversas teorias que possuem implicações tecnológicas importantíssimas para a vida humana, sendo algumas advindas de situações inusitadas. Neste trabalho é apresentado o problema proposto pelo Conde de Buffon (1707-1788) conhecido como o “Problema das Agulhas de Buffon”, cuja resolução acarreta duas aplicações tecnológicas e uma forma de estimar a famosa constante π. Esse trabalho é oriundo do Workshop Didático-Pedagógico realizado pelo grupo PET-Matemática da UFCG.

PALAVRAS-CHAVE: Agulhas de Buffon. Probabilidade. Geometria. Tomografia computadorizada.

1. INTRODUÇÃO

No século XVIII, segundo [1], o matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc (1707-1788), o Conde de Buffon, realizava estudos sobre probabilidade, os quais chamavam a atenção de todos devido à abordagem geométrica dos problemas feita por ele. Em maio de 1733, o Conde de Buffon submeteu à Acedémie Royale des Sciences um artigo que conteria um problema de probabilidade geométrica conhecido atualmente como Problema das Agulhas de Buffon. Apesar da palavra agulha não evidenciar a grande relevância que há no problema, o Problema das Agulhas de Buffon possui duas aplicações tecnológicas bastante inusitadas. Neste trabalho, exibiremos duas aplicações tecnológicas do problema das agulhas de Buffon e também uma forma de estimar a constante π.

METODOLOGIA

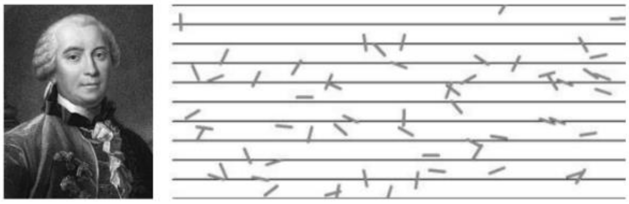
Este trabalho é oriundo do Workshop Didático-Pedagógico realizado pelo Grupo PET-Matemática-UFCG. Para a efetivação, foi necessário realizar uma pesquisa bibliográfica das referências [1] e [2].

2. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O problema das Agulhas de Buffon pode ser enunciado como:

Problema: Considere um plano com retas paralelas com espaçamento d. Lança-se uma agulha de comprimento l nesse plano. Qual é a probabilidade de a agulha cruzar uma dessas retas?

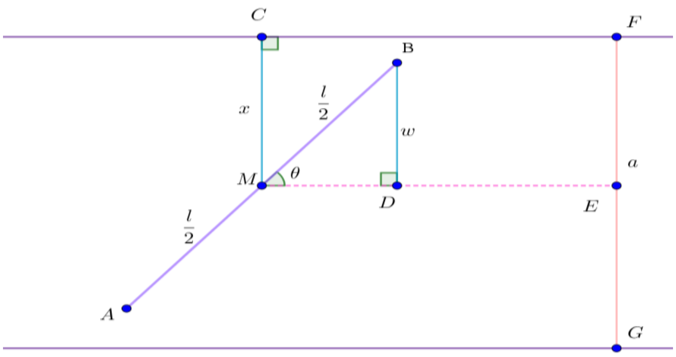
Figura 1: O Conde de Buffon e a representação do problema das Agulhas de Buffon



Fonte: BEHRENDS, (2014)

Modulemos o problema geometricamente da seguinte forma:

Figura 2: Modelação geométrica do problema das Agulhas de Buffon

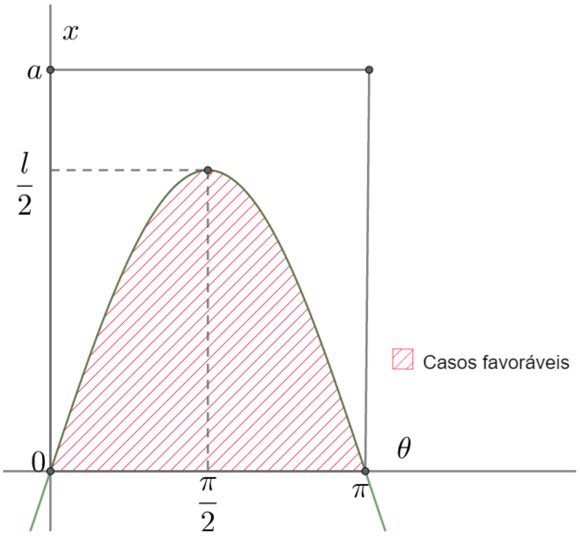


Na Figura 2, o segmento AB representa a agulha, M é o ponto médio de AB, a representa a distância entre as retas paralelas e x representa a menor distância do ponto M a uma das restas paralelas. Consideremos também o segmento MD, paralelo à reta CF, e BD, perpendicular à MD, cuja medida é w. Por fim, θ é o ângulo $D\widehat{M}B$. Vejamos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{w}{\frac{l}{2}} \Rightarrow w = \frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta.$$

Para que a agulha toque uma das retas paralelas, é necessário que x seja menor do que w. Como x é a menor distância do ponto M a uma das retas, segue que $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Observemos também que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Assim, consideremos um sistema cartesiano com variáveis θ e x, como apresentado na Figura 3.

Figura 3: Sistema cartesiano com variáveis θ e x e representação dos casos totais e favoráveis do problema das Agulhas de Buffon



Dessa forma, todos os casos possíveis podem ser representados pela área A_t do retângulo $ABCD$ e os casos favoráveis estão representados pela área A_f sob o gráfico da função w. Assim,

$$A_t = \pi \cdot \frac{a}{2} \ , \quad A_f = \int_0^{\pi} w \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \cdot \operatorname{sen}\theta \, d\theta = l$$

Dessa forma, a probabilidade será

$$\mathrm{p} = \frac{A_f}{A_t} = \frac{l}{\pi \cdot \frac{a}{2}} = \frac{2l}{a\pi}. \qquad \text{(I)}$$

Estimando π

Note que, em (I), é evidenciado uma constante famosa, o π. Ao estimar a probabilidade experimentalmente lançando agulhas na malha, contabilizando a quantidade de agulhas que tocaram nas linhas e, em seguida, dividindo essa quantidade pelo total de agulhas lançadas, poderemos obter uma aproximação para π da seguinte forma

$$\pi = \frac{2l}{ap}.$$

Em particular, no caso em que $a = 2l$. Teremos a bela relação

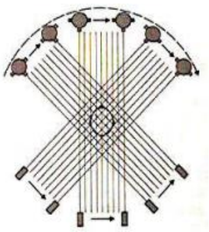
$$\pi = \frac{1}{p}.$$

Nessa última igualdade, é mostrada uma relação entre o número π e um evento da natureza.

Tomografia computadorizada

Uma incrível aplicação do problema pode ser encontrada na tomografia computadorizada, como pode ser visto em [2]. Neste caso, em vez de lançarmos o objeto no feixe, lançaremos o feixe no objeto, figura 4, e obteremos a probabilidade de o feixe intersectar o objeto experimentalmente.

Figura 4: Feixes lançados sobre um objeto



Fonte: SILVA (2014)

Dessa forma, o comprimento do objeto é dado por

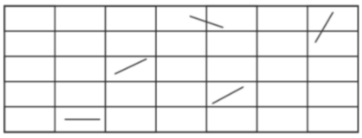
$$l = \frac{pa\pi}{2}$$

Tendo em vista essa lógica, em 1979, o Bioquímico e Físico nuclear Allan MacLeod Comarck e o engenheiro eletricista Godfrey Newbold Housenfield ganharam conjuntamente o prêmio Nobel da Medicina por aplicar feixes de raios x em tumores e conseguir projetar o tumor no computador. E foi assim que as agulhas fizeram surgir a tomografia computadorizada.

A medição do escoamento de uma Bacia Hidrográfica

Segundo [3], a generalização de Laplace do problema das Agulhas de Buffon, figura 5, é uma ferramenta eficaz para determinar a medição do escoamento de uma Bacia Hidrográfica.

Figura 5: Generalização de Laplace do problema das Agulhas de Buffon



Fonte: MORAES, (2014)

Nesse caso, a probabilidade é dada por

$$P = \frac{2L(D_1 + D_2)}{\pi D_1 D_2}.$$

Onde D_1 e D_2 são as medidas dos lados do retângulo e L é o comprimento do escoamento da Bacia Hidrográfica. Dessa forma, considerando o escoamento da bacia hidrográfica como L da equação anterior, podemos estimar o valor do comprimento do escoamento da Bacia Hidrográfica ao calcular experimentalmente a probabilidade, como pode ser visto a seguir:

$$L = \frac{(P \pi D_1 D_2)}{2(D_1+D_2)}.$$

E essa é a forma que as agulhas nos ajudam a medir o escoamento das bacias hidrográficas.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por mais que a ciência não mostre a aplicação imediata do que está sendo estudado, ela poderá trazer implicações que são de extrema importância para a sociedade. Dessa forma, a curiosidade juntamente com a criatividade é ainda o melhor caminho para desenvolver a ciência.

REFERÊNCIAS

1.PAES, Artur Z. et al. *O problema das Agulhas de Buffon*. Instituto de Física - Universidade São Paulo, São Paulo, 2015.

2.SILVA, Antônio Klinger Guedêlha da. *Probabilidade Geométrica: Generalizações do problema da Agulha de Buffon e aplicações*. 2014. Dissertação (Mestrado profissional) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará Centro de Ciências, Fortaleza, 2014.

3. MORAES, José Agissander Oliveira de. *Probabilidade Geométrica e Aplicações*. 2014. Dissertação (PROFMAT) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Goiás Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2014

4. BEHRENDS, Ehrhard et al. *Terá Buffon realmente lançado agulhas?* Newsletter of the European Mathematical Society. 2014.