

Resolução numérica da EDO que modela o decaimento radioativo do carbono-14, usando o método de Adams-Bashforth-Moulton

Lucas Hariel Cavalcanti de Oliveira^{1, 2} - lhcant@outlook.com
Carlos Vinício Carvalho Cunha¹ - carlos.vinicio@estudante.ufcg.edu.br
Marcelo Vítor de Oliveira Silva¹ - marcelo.vitor@estudante.ufcg.edu.br
Deise Mara Barbosa de Almeida¹ - deise@mat.ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

²Parcialmente financiado pelo MEC/FNDE/PET

Resumo: O processo de modelagem de diversos problemas recaem em uma equação diferencial, e que para resolver o problema, devemos encontrar a função solução da equação diferencial. O propósito deste trabalho é estudar o método numérico de passo múltiplo de Adams-Bashforth-Moulton de 4^ª ordem, para encontrar a solução aproximada da equação diferencial ordinária de primeira ordem que modela o decaimento do carbono-14, costumeiramente utilizado no processo de datação. Para tal, fazemos a descrição do processo de modelagem matemática do processo de datação por decaimento radioativo do carbono-14 e a descrição do método objeto de estudo. Por fim, mostramos a solução analítica do problema e a comparamos com a solução numérica fornecida pelo método numérico. Constatamos a eficiência do método na resolução de problemas do tipo.

Palavras-chave: equação diferencial ordinária; decaimento radioativo; método numérico

1. Introdução

Uma equação diferencial ordinária (EDO) consiste em uma equação formada por derivadas e cuja incógnita é uma função dependente somente de uma variável. Diversos problemas são modelados através de uma equação diferencial ordinária. Neste trabalho, buscamos a resolução numérica de uma EDO em particular.

Uma interessante aplicação das EDO's ocorre no processo de datação por decaimento radioativo. Cada elemento radioativo possui um decaimento característico, no qual o tempo que este elemento leva para sua atividade ser reduzida à metade é chamado de meia vida. No processo de datação por decaimento radioativo, o elemento mais usual é o carbono-14 que apresenta meia vida de aproximadamente 5.730 anos e pode datar materiais de até 40 mil anos, mas se torna ineficiente em datações de objetos com idade maior que 40.000 anos.

No presente trabalho buscamos explorar o processo de decaimento radioativo do carbono-14 descrito por uma EDO de primeira ordem, utilizando o método numérico de Adams-Bashforth-Moulton de 4^ª ordem. Este é um método de passo múltiplo que tem como objetivo a resolução de problemas de valor inicial. Para tanto, o método foi implementado em linguagem computacional Python, por seu fácil manuseio e versatilidade, na implementação dos métodos e elaboração dos gráficos. A fim de testar a eficiência do método numérico na resolução de problemas do tipo, faremos a comparação da solução analítica com a obtida numericamente.

2. Modelagem Matemática

Com o passar do tempo, devido à sua natureza instável, os elementos radioativos apresentam uma redução da massa e da atividade do núcleo instável, a uma frequência que lhe é característica, até se rearranjar em um modelo mais estável. Esse processo de transmutação dos núcleos instáveis em formas mais estáveis é denominado de decaimento radioativo. Uma forma de analisar o decaimento é medindo o tempo necessário para que a atividade do núcleo radioativo seja reduzida à metade, a chamada meia vida. Tal descrição é feita por meio de uma equação diferencial ordinária.

A taxa na qual ocorre o processo de decaimento em um material radioativo é diretamente proporcional ao número de núcleos radioativos presentes na amostra, ou seja, àqueles núcleos que ainda não sofreram decaimento. Se denotarmos por Q a quantidade de matéria radioativa presente em um determinado momento t , a taxa de variação de Q é expressa por:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q.$$



De acordo com (ALVES, 2015), resolvendo a EDO pelo método analítico de variáveis separáveis, obtemos a expressão de Q :

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

sendo λ a chamada constante de decaimento, que é relativa a cada material radioativo e Q_0 a quantidade de matéria que ainda não decaiu num instante $t = 0$.

Note que ainda não é possível determinar o valor da constante de decaimento. De acordo com (GARCIA; GONÇALVES; BUSKE, 2011), considerando a meia vida de um elemento como $T_{1/2}$ e $Q = \frac{Q_0}{2}$, segue das equações anteriores que:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Daí,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Assim, podemos determinar a constante de decaimento conhecendo a meia vida de um elemento, possibilitando calcular a sua taxa de decaimento.

3. Metodologia

Grande parte dos problemas descritos por EDO's não podem ser resolvidos por meio de um Método Analítico, pela inviabilidade do problema ou pela inexistência de solução analítica, (MAIOLI; AFONSO, 2015) e (FIGUEIRÊDO, 2021). Por esse motivo, são utilizados os Métodos Numéricos, que contornam as dificuldades encontradas na obtenção de soluções analíticas, fornecendo, por meio de algoritmos, o que chamamos de soluções numéricas (uma aproximação à solução analítica).

Para a resolução numérica das EDO's com valor inicial, utilizamos o método de passo Adams-Bashforth-Moulton de 4º ordem, que é um método de passo múltiplo e consiste na combinação de dois outros métodos (LOBÃO; SANCHES; FURLAN, 2017). O primeiro é o método de Adams-Bashforth de passo 4, considerado um método explícito, pois utiliza no cálculo de um novo ponto somente informações de pontos já determinados. A equação de iteração deste método é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}).$$

Já o segundo é o Adams-Moulton de passo 3, que é um método implícito, utiliza no cálculo de um novo ponto os valores já calculados e uma estimativa do valor a ser calculado. Este método tem como equação de iteração:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Conforme Filho (2007), o método explícito, por sua construção, não gera bons resultados. Já o método implícito precisa ser utilizado em conjunto com o método explícito, pois necessita de uma estimativa do próprio valor a ser calculado. Dessa forma, a ideia da combinação desses dois métodos é prever e corrigir os pontos calculados: o método explícito utiliza uma estimativa inicial dos valores e o implícito faz uma correção (refina essa estimativa), caracterizando um método do tipo preditor-corretor. O corretor pode ser aplicado mais de uma vez para melhorar ainda mais o resultado.

Em uma primeira iteração de um método de passo múltiplo, já são necessários valores iniciais dos pontos que queremos estimar; o que pode parecer ambíguo. Para solucionar esta questão, utilizamos um método de passo simples, aquele que na estimativa de um novo valor utilizam informações de um único ponto estimado anteriormente, para terminar uma estimativa. Neste trabalho, optamos por utilizar o método de passo simples de Runge-Kutta de 4º ordem, que, apesar de agregar uma quantidade maior de iterações, dispõe de uma precisão maior do que a maioria dos outros métodos de passo simples (MAIOLI; AFONSO, 2015). A equação de iteração deste método é dada da seguinte forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4),$$

sendo

$$k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \text{ e } k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Temos ainda que h é definido por:

$$h = \frac{b - a}{m},$$

sendo a e b os extremos do intervalo em que calculamos a solução, e m o número de partições, uma vez que o domínio deve ser discretizado para construção do método.

4. Resultado e discussão

Consideremos o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} Q' = -\lambda_{C_{14}}Q \\ Q_0 = 100\%, \text{ para } Q_0 = Q(0) \\ 0 \leq t \leq 50.000 \end{cases} .$$

Como apresentado na modelagem matemática, para calcularmos a taxa de decaimento de um material radioativo, precisamos conhecer a sua constante de decaimento que, por sua vez, pode ser determinada conhecendo a meia vida do material. A meia vida de um elemento radioativo é obtida experimentalmente. Para o carbono-14, é de aproximadamente 5.730 anos (ALVES, 2015). Sabendo disso, podemos calcular a sua constante de decaimento:

$$\lambda_{C_{14}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} = 1,20968 \times 10^{-4}.$$

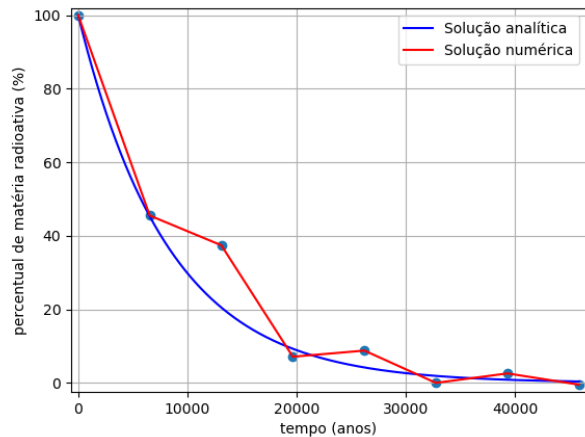
Considerando a proporção de massa radioativa no instante inicial $Q_0 = 100\%$, da Equação (1) segue que o decaimento radioativo do carbono-14 é dado por:

$$Q = e^{(-1,20968 \times 10^{-4})t}.$$

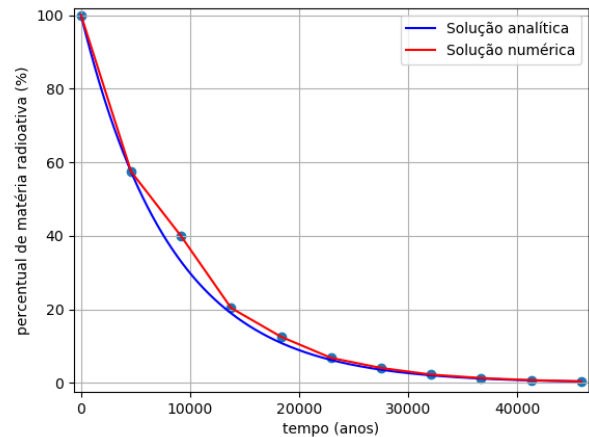
Esta é a solução analítica do problema de decaimento do carbono-14 que utilizaremos para comparar a solução obtida através do método numérico.

Na implementação do método de Adams-Bashforth-Moulton de 4th ordem feita em linguagem computacional Python, inicialmente consideramos um número de 7 e 10 subintervalos para o cálculo da solução numérica. Posteriormente, utilizamos 20 e 30 subintervalos para verificar se havia melhora na obtenção da solução. Após essa implementação, geramos o gráfico das soluções analítica e numérica para compará-las. Em todos os gráficos da Figura (1) temos a solução analítica em azul e as soluções numéricas em vermelho usando diferentes quantidades de subintervalos.

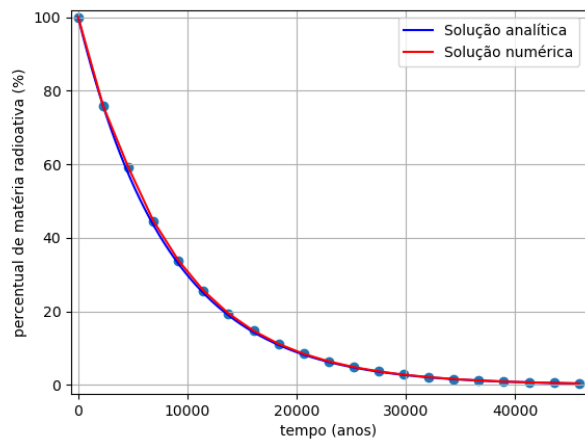
Na Figura (1a), temos o gráfico da solução numérica com sete subintervalos, em que percebemos que os pontos calculados ficaram distantes da solução exata, cometendo erros significativos na aproximação da solução. Já na Figura 1b, cuja implementação foi feita utilizando 10 subintervalos, podemos notar uma melhora na aproximação da solução obtida pelo método. Isso ocorreu por conta do tamanho de h , que foi relativamente menor. Analisando as Figuras (1c) e (1d), é perceptível a relação existente entre o tamanho dos subintervalos e a aproximação com a solução analítica, constatando que quanto maior for a quantidade de subintervalos ou, equivalentemente, quanto menor o h , mais próxima à solução numérica encontra-se da solução exata. Dessa forma, podemos constatar que o método numérico se mostrou eficiente na resolução do problema proposto.



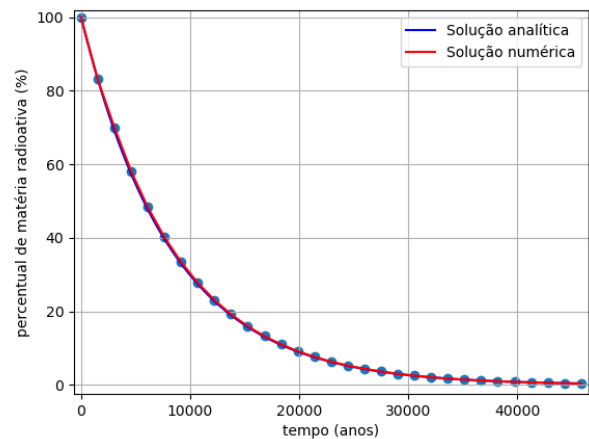
(a) 7 subintervalos



(b) 10 subintervalos



(c) 20 subintervalos



(d) 30 subintervalos

Figura 1: Solução Analítica e Numérica do problema de decaimento radioativo do carbono-14

5. Conclusões

Neste trabalho apresentamos o problema de decaimento radioativo do carbono-14 cuja solução é dada por resolver uma equação diferencial ordinária. Mostramos a solução analítica do problema, que modela a taxa de decaimento do carbono-14, a descrição do método numérico Adams-Bashforth-Moulton de 4º ordem com o qual encontramos a solução numérica e, então, fizemos a comparação da solução analítica com a solução numérica obtida.

Observando os resultados graficamente, percebemos que, ao comparar a solução analítica e solução numérica, o método numérico apresentou uma eficiência expressiva na resolução do problema, aproximando-se tanto da solução analítica a ponto de tornar difícil diferenciá-las. Além disso, com esta análise dos gráficos, é perceptível que a partir de 40.000 anos o percentual de carbono-14 que ainda não decaiu é muito próximo de zero, confirmando a ineficiência deste elemento na datação de objetos que apresentam idade superior a 40 mil anos.

Referências

- ALVES, W. B. Sobre a datação por decaimento radioativo. *Revista Eletrônica UNIVAG*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- FIGUEIRÊDO, J. R. E. Introdução aos métodos numéricos na resolução de equações diferenciais de primeira ordem. *Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - Curso de Licenciatura em Matemática*, p. 9, 2021. Citado na página 2.
- FILHO, F. F. C. *Algoritmos numéricos*. [S.l.]: LTC, 2007. ISBN 9788521615378. Citado na página 2.
- GARCIA, K. B.; GONÇALVES, V. de M.; BUSKE, D. Aplicação de equações diferenciais no cálculo do decaimento radioativo. *Universidade Federal de Pelotas*, 2011. Citado na página 2.
- LOBÃO, D. C.; SANCHES, I. J.; FURLAN, D. L. Introdução aos métodos numéricos. *Universidade Federal Fluminense - Volta Redonda*, p. 114; 131–135, 2017. Citado na página 2.
- MAIOLI, G.; AFONSO, S. M. S. Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias. *Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho- Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus Rio Claro*, p. 8; 44; 131–135, 2015. Citado na página 2.