UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Análise da Introdução dos Números Reais em Livros do Ensino Médio

PET Matemática UFCG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

INTRODUÇÃO

Pontos Analisados

- Clareza na exposição dos assuntos;
- Exemplos adequados;
- Ligação entre temas diferentes;
- Conceitualidade;
- Erros conceituais;
- Exemplos inadequados que não ajudam a compreensão da definição;
- Análise de gráficos, desenhos, etc.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

LIVRO 1

Alan de Araújo Guimarães

Conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

A idéia de medir está ligada à de comparar, ou seja, quantas vezes uma determinada distância ou superfície é maior ou menor do que determinada unidade adotada como padrão.

Se, por exemplo, tentarmos medir a altura de um prédio com uma unidade como o metro, podemos obter eventualmente um número não inteiro e estaríamos diante da idéia de uma fração de metro.

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, onde *a* é um número inteiro qualquer e *b*, um número inteiro qualquer diferente de zero. É indicado por $\mathbb{Q}$ e representado da seguinte forma:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}}$$

Todo número racional também pode ser escrito na forma decimal, que pode ser:
Exata: quando conseguimos representá-lo por um número finito de algarismos.

Exemplos:

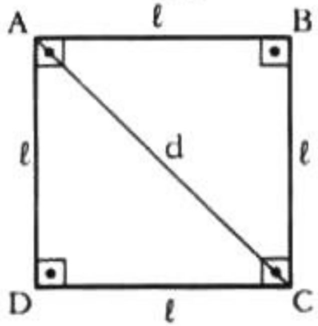
- 0,6 pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $3 \in \mathbb{Z}$ e $5 \in \mathbb{Z}^*$
- 7 pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $7 = \frac{7}{1}$; $7 \in \mathbb{Z}$ e $1 \in \mathbb{Z}^*$
- 0,18 pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, isto é, $0{,}18 = \frac{18}{100}$; $18 \in \mathbb{Z}$ e $100 \in \mathbb{Z}^*$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

Conjunto $\mathbb{I}_R$ dos números irracionais

Os números racionais não solucionaram muitos problemas envolvendo a Geometria e a Aritmética. Em determinadas figuras, alguns segmentos não têm uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em cada um deles; são os chamados segmentos incomensuráveis. Os pitagóricos já haviam acusado essa dificuldade com relação à diagonal e ao lado do quadrado.

Exemplificando, para um quadrado de lado $\ell = 1$ e diagonal d, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \notin \mathbb{Q}$$

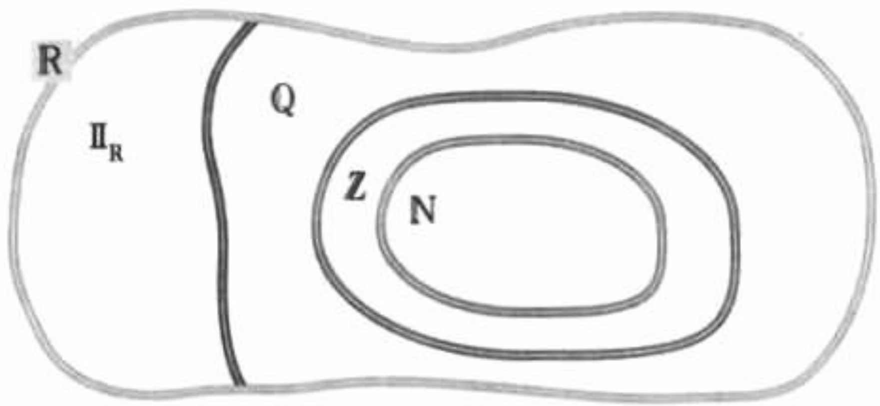
Fica evidente que nem sempre a raiz de um número racional é um número racional. Para que a teoria dos números racionais evoluísse foi necessário o avanço dos estudos sobre infinitos e geometria analítica. Foram gastos alguns séculos para que, entre tantas contribuições, chegássemos ao século XIX com Dedekind (J.W.R. Dedekind, 1831-1916) e Cantor (Georg Cantor, 1845-1918), dando um rigor científico a essa teoria.

Conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é formado pela reunião do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais com o conjunto $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ dos números irracionais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE
CAMPINA GRANDE

Representação dos conjuntos numéricos através de diagramas:



Observe que o conjunto dos números irracionais é o complemento do conjunto dos números racionais em relação ao conjunto dos reais, e vice-versa.

39 (Fuvest-SP) Calcule $\dfrac{1-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$.

40 Simplifique:

$$\frac{\left(3-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdot 2}{3}}$$

41 Calcule o valor racional de $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}$, para $x = 3$.

47 (FGV-SP) Um número de dois algarismos é tal que o algarismo das dezenas é igual a $\frac{3}{4}$ do algarismo das unidades. Se os algarismos forem permutados entre si, obtém-se um número que é 9 unidades maior do que o primeiro. Então, a soma dos dois algarismos é:

a) 8
b) 5
c) 6
d) 9
e) 7

48 (Cesgranrio-RJ) Um atleta, correndo com velocidade constante, completou a maratona em *M* horas. A fração do percurso que ele correu em 2M minutos foi:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{15}$
d) $\frac{1}{30}$
e) $\frac{1}{120}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

LIVRO 2

Jogli Gidel da Silva Araújo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

• Números Racionais

Conjunto dos números racionais

Número racional é todo número que pode ser colocado sob a forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Assim, temos:

- Todo número inteiro é racional.

Exemplos

a) 0, pois $0 = \frac{0}{1}$. b) -3, pois $-3 = \frac{-3}{1}$. c) 5, pois $5 = \frac{5}{1}$.

- Todo número fracionário é racional.

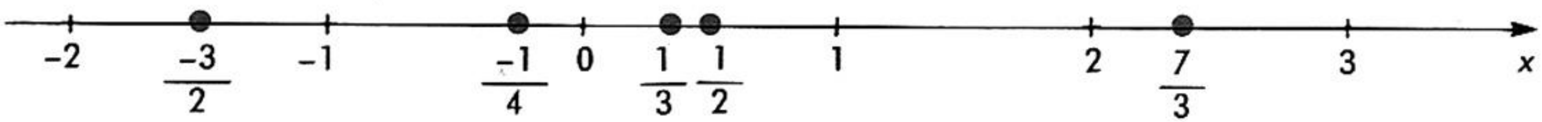
Exemplos

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{6}$.

- Todo número decimal exato é racional.

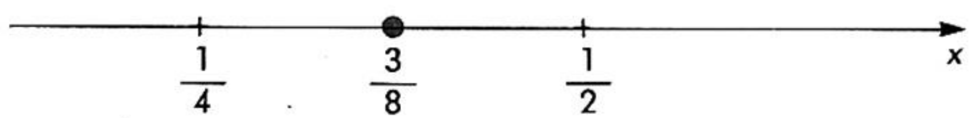
Exemplos

a) 0,2; pois $0{,}2 = \frac{2}{10}$. b) 3,15; pois $3{,}15 = \frac{315}{100}$.



Convém observar que dados os números racionais *a* e *b* **sempre** existirá entre eles o número $\frac{a+b}{2}$, também racional. Assim, por exemplo, entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ existe o número

$$\frac{3}{8} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{2}.$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

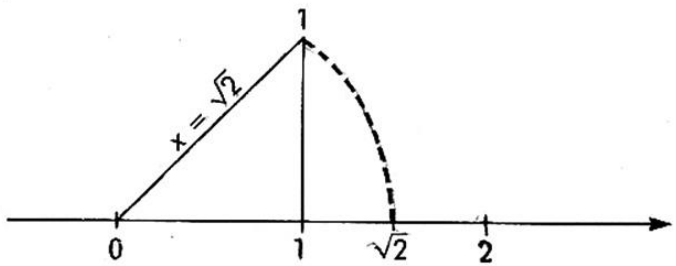
• Números Irracionais

Conjunto dos números irracionais

O fato de sempre existir, entre dois números racionais, um outro número racional não significa que os números racionais preencham completamente os pontos da reta, o que vale dizer que existem pontos da reta que não representam números racionais. A esses pontos associamos os **números irracionais**.

Um exemplo disso é o número $\sqrt{2}$, que não é racional, e, no entanto, existe um ponto da reta que o representa, conforme podemos verificar através da figura:

Um exemplo disso é o número $\sqrt{2}$, que não é racional, e, no entanto, existe um ponto da reta que o representa, conforme podemos verificar através da figura:



De acordo com o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 1 + 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Mostremos que $\sqrt{2}$ não é número racional.

De fato, se $\sqrt{2}$ fosse racional, então deveriam existir dois números p e q primos entre si, tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, ou seja, $p = \sqrt{2}\,q$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos: $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 deve ser par e então p é par.

Fazendo $p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), teremos: $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$. Logo, q^2 deve ser par e então q é par.

O fato de p e q serem pares nos mostra que a hipótese de p e q serem primos entre si é falsa. Logo, não existe o número racional $\dfrac{p}{q}$, tal que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Portanto, $\sqrt{2}$ é número irracional.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

De um modo geral, **todo número decimal não-exato e não-periódico é irracional**, bem como **toda raiz não-exata.**

Considere como exemplo o número $n = 0{,}151617\ldots$. Nele, vê-se claramente que a parte decimal tem uma infinidade de elementos formados por pares de números sucessivos. Assim, desejando expressar n com mais casas decimais, teríamos:

$$n = 0{,}15161718\ldots$$
$$n = 0{,}1516171819\ldots \text{ etc.}$$

Esse número decimal não é periódico, nem exato. Ele é um exemplo de número irracional.

Os números: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{5}$; π; 0,212212221... são também exemplos de números irracionais.

Indicamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{I}$. As imagens de todos os números racionais, juntamente com as imagens de todos os números irracionais, preenchem completamente a reta numerada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

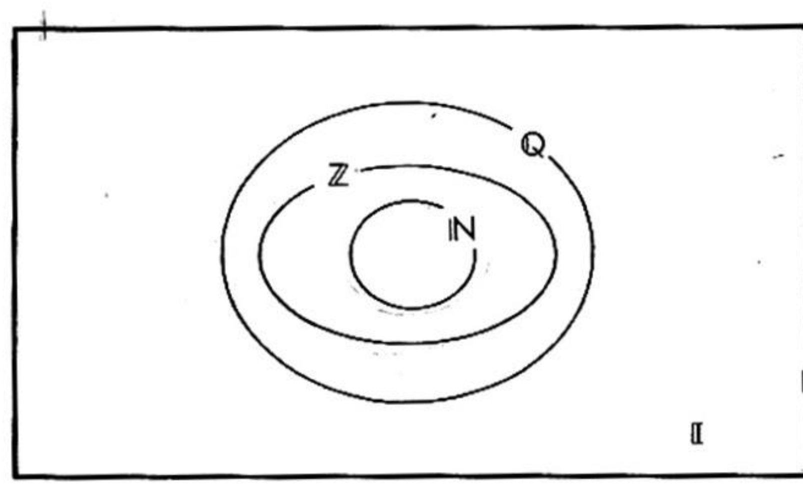
• Números Reais

Conjunto dos números reais

Chamamos número **real** todo número **racional** ou **irracional**, ou seja, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é a reunião do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$), isto é: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

O diagrama ao lado nos mostra a relação entre os conjuntos estudados. Observe que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Usando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\supset$, estabeleça uma relação entre:

a) -2 e $\mathbb{Z}$

b) $\frac{-2}{5}$ e $\mathbb{Z}$

c) $\frac{-2}{5}$ e $\mathbb{Q}$

d) -4 e $\mathbb{Z}_+^*$

e) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$

f) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$

2. Efetue as seguintes operações entre conjuntos:

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+$

d) $\mathbb{Z}_- - \{0\}$

e) $\mathbb{Q}_- \cap \mathbb{Q}_+$

f) $\mathbb{Q}_- \cup \mathbb{Q}_+$

3. Escreva os seguintes conjuntos indicando seus elementos:

a) $\{x \in \mathbb{Z}^* \mid x > -3\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x \leqslant 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leqslant 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z}^* \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

e) $\{x \in \mathbb{Z}_- \mid x > -5\}$

f) $\{x \in \mathbb{Z}_+ \mid x < -2\}$

LIVRO 3

Lorena Brizza Soares Freitas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

• Números Racionais

O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, com denominador não-nulo. Como entre dois números racionais quaisquer existem infinitos números racionais, não é possível nomear todos os elementos de $\mathbb{Q}$. Assim, representamos esse conjunto por meio de uma característica comum a todos os elementos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

• Números Irracionais

Existem números que na forma decimal não são periódicos, nem têm um número finito de casas, como π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e muitos outros. A esses números chamamos *irracionais*, e eles compõem o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$) ($\complement_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{I}$).

Seria adequado que esses números fossem mostrados da seguinte forma:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1,73205080\ldots$$

$$\pi = 3,1415926\ldots$$

UFCG UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

<u>Notação</u>

$$(\square)\ \left(C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \square\right)$$

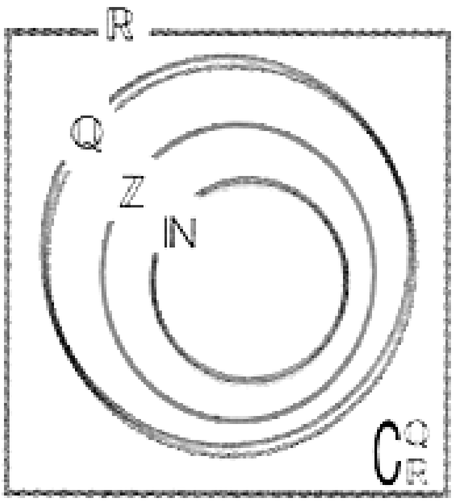
Notação confusa e inadequada pois contém o conjunto dos números reais.

• Números Reais

A união dos números racionais com os irracionais forma o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

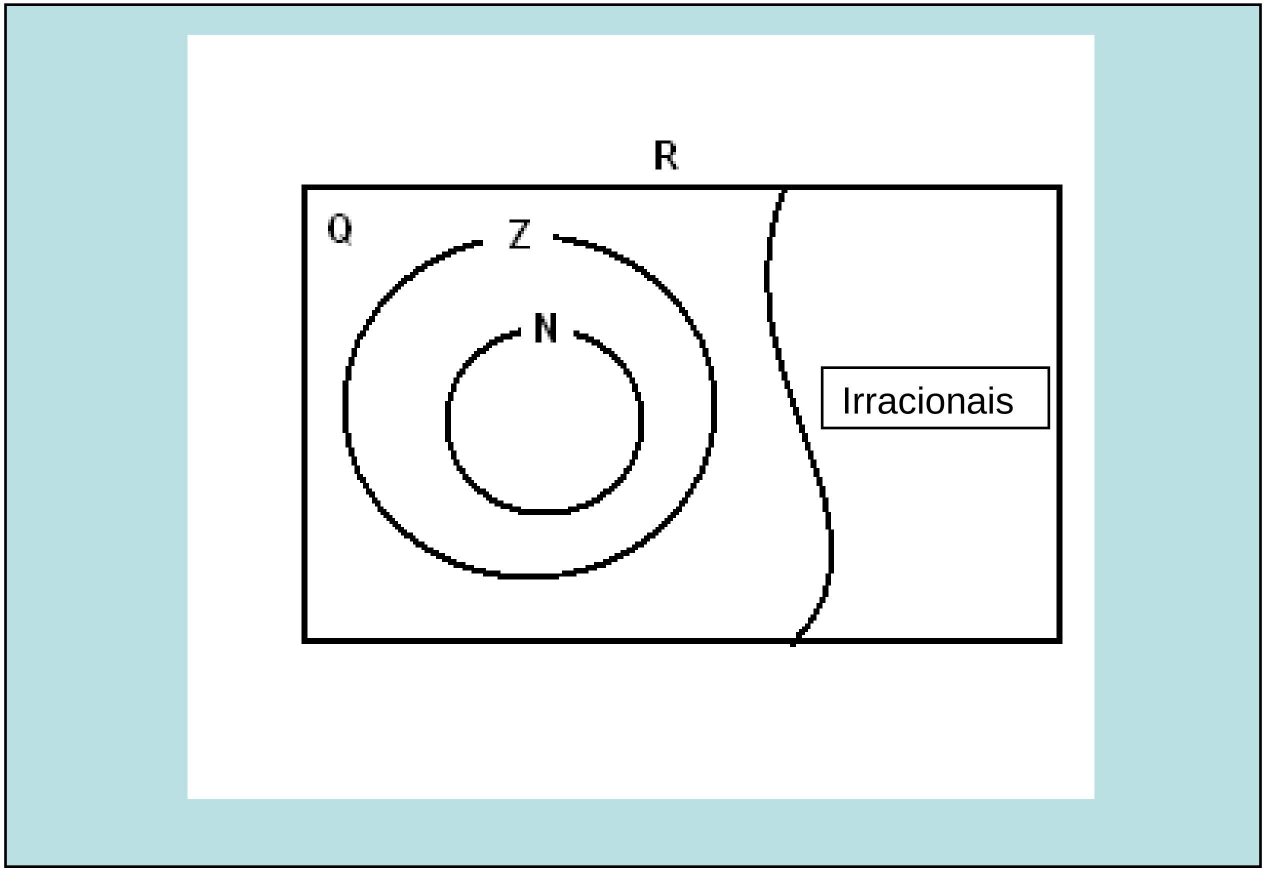
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Diagrama



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sugestão

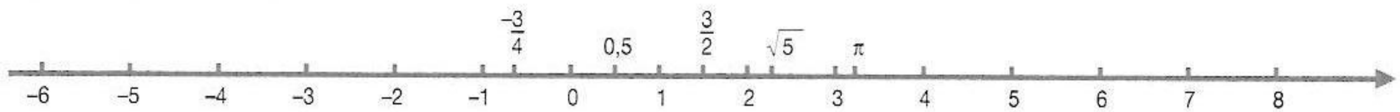


Reta Real

A cada ponto de uma reta podemos associar um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto na reta.

Dizemos que o conjunto $\mathbb{R}$ é denso, pois entre dois números reais existem infinitos números reais (ou seja, na reta, entre dois pontos associados a dois números reais, existem infinitos pontos).

Veja a representação na reta de $\mathbb{R}$:



Observe que, ao representar geometricamente $\mathbb{R}$, também estamos representando os números naturais, os inteiros, os racionais e os irracionais.

Exercício resolvido

Complete corretamente com os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ e $\not\subset$.

a) $\sqrt{16}$ ____ $\mathbb{Q}$ b) $\dfrac{20}{4}$ ____ $\mathbb{N}^*$ c) $\sqrt{-4}$ ____ $\mathbb{R}$ d) $\{-1, 2, 4\}$ ____ $\mathbb{Z}$ e) $\mathbb{Q}$ ____ $\mathbb{R}^*$

Solução:

a) $\sqrt{16} \in \mathbb{Q}$ $\left(\text{porque } \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}\right)$

b) $\dfrac{20}{4} \in \mathbb{N}^*$ $\left(\text{porque } \dfrac{20}{4} = 5 \in \mathbb{N}^*\right)$

c) $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ (porque nenhum número real elevado ao quadrado resulta em -4)

d) $\{-1, 2, 4\} \subset \mathbb{Z}$ (porque todos os elementos do conjunto são números inteiros)

e) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{R}^*$ (porque $0 \in \mathbb{Q}$ e $0 \notin \mathbb{R}^*$)

Exercício proposto

Substitua o ■ corretamente pelos símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ e $\not\subset$:

a) $0{,}757575\ldots$ ■ $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{N}$ ■ $\mathbb{Z}^*$

c) $\mathbb{Z}_-$ ■ $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Q}^*$ ■ $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{Q}$ ■ $\mathbb{R}^*$

f) $\sqrt{-16}$ ■ $\mathbb{R}$

g) $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ ■ $\mathbb{R}$

h) $\left\{\dfrac{2}{3}, 2, \sqrt{9}\right\}$ ■ $\mathbb{Q}$

LIVRO 4

Marcella Luanna da Silva Lima

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

• Números Racionais

Conjunto dos números racionais

Os números que podem ser expressos sob a forma $\frac{a}{b}$ sendo *a* e *b* números inteiros e $b \neq 0$, são denominados *números racionais*. O conjunto dos números racionais é representado pela letra Q.

$$Q = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\right\}$$

Para passar um número expresso na forma de fração para a forma decimal, divide-se o numerador pelo denominador.

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{14}{5} = 2{,}8 \qquad \frac{13}{6} = 2{,}1666\ldots$$

Quando dividimos o numerador pelo denominador, podemos obter:

➤ *um decimal exato*, isto é, um número que tem uma representação finita (número finito de casas decimais).

$$\frac{9}{2} = 4{,}5 \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad -\frac{3}{8} = -0{,}375$$

➤ *uma dízima periódica*, isto é, um número decimal que tem uma representação infinita (número infinito de casas decimais) e periódica (há algarismos que se repetem periodicamente).

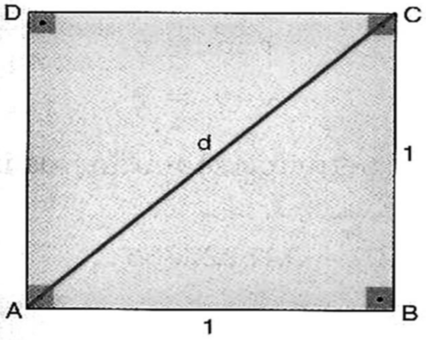
$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3} \qquad \frac{14}{33} = 0{,}424242\ldots = 0{,}\overline{42}$$

$$\frac{13}{6} = 2{,}1666\ldots = 2{,}1\overline{6} \qquad \frac{40}{99} = 0{,}404040\ldots = 0{,}\overline{40}$$

• Números Irracionais

Números irracionais

Vamos determinar a medida da diagonal d do quadrado cujo lado mede 1.



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 1 + 1$$
$$d^2 = 2$$

Qual o número racional positivo cujo quadrado dá 2?

Inicialmente, vamos fazer:

$$1^2 = 1 \text{ e } 2^2 = 4$$

Logo, d está entre 1 e 2 $(1 < d < 2)$.

Em seguida, vamos determinar a primeira casa decimal de d.

$$(1{,}3)^2 = 1{,}69 \qquad (1{,}4)^2 = 1{,}96 \qquad (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

Logo, d está entre 1,4 e 1,5, ou seja, $1{,}4 < d < 1{,}5$.
Então, 1,4 é o valor aproximado de d, por falta, com uma casa decimal.

Usando o mesmo procedimento, determinamos a segunda casa decimal de *d*.

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \qquad (1{,}42)^2 = 2{,}0164$$

Logo, *d* está entre 1,41 e 1,42, ou seja, $1{,}41 < d < 1{,}42$.

Aqui, 1,41 é o valor aproximado de *d*, por falta, com duas casas decimais.

Se repetirmos esse processo, vamos obter quantas casas decimais quisermos, mas encontraremos sempre um valor aproximado para *d*, por falta, pois esse valor, elevado ao quadrado, é sempre um número menor que 2.

Os matemáticos representam o valor exato para a medida da diagonal do quadrado de lado 1 por $\sqrt{2}$.

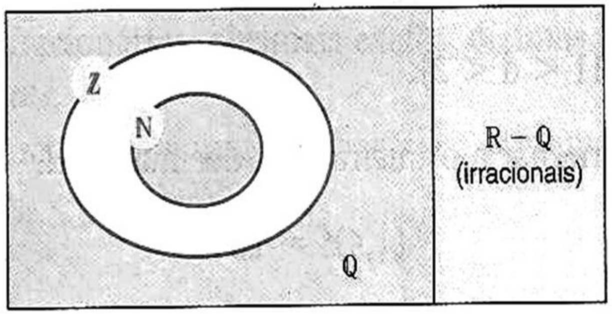
$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$

Esse número tem uma infinidade de casas decimais que não se repetem, portanto não é uma dízima periódica. Assim, $\sqrt{2}$ não é um número racional. É um *número irracional*.

Número irracional é o número que tem uma representação decimal infinita e não-periódica.

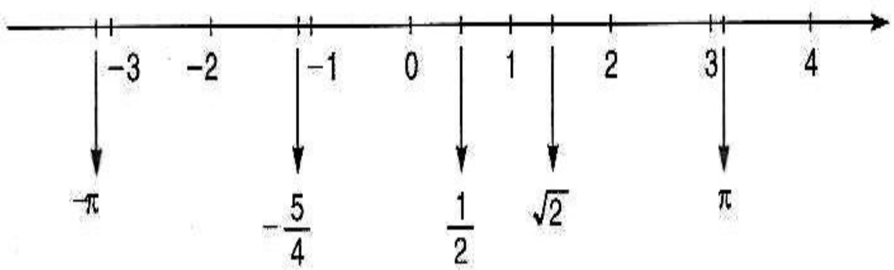
• Números Reais

Reunindo os números racionais com os números irracionais, formamos o conjunto dos números reais, que representamos por $\mathbb{R}$.



Assim, todo número natural, inteiro, racional ou irracional também é real.

Podemos estabelecer uma correspondência um a um (correspondência **biunívoca**) entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos de uma reta, ou seja, a cada número real corresponde um e um só ponto da reta e vice-versa.



Essa representação geométrica dos números reais é chamada *reta numérica real* ou, simplesmente, *reta real*.

EXERCÍCIOS

28 Usando os símbolos $\in$ ou $\notin$, relacione:

a) -7 e $\mathbb{N}$

b) $\sqrt{2}$ e $\mathbb{Q}$

c) 4 e $\mathbb{Z}$

d) $\frac{1}{2}$ e $\mathbb{Z}$

e) $\sqrt{10}$ e conjunto dos irracionais

f) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ e $\mathbb{Q}$

g) $0,166...$ e $\mathbb{Q}$

h) $\sqrt[3]{8}$ e $\mathbb{N}$

i) -2 e $\mathbb{Z}$

29 Represente os conjuntos a seguir por meio de uma propriedade:

a) $A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$

b) $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

30 Determine os seguintes conjuntos, enumerando seus elementos:

a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 - 9x + 5 = 0\}$

b) $N = \left\{a \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{a} + a = 2\right\}$

c) $P = \{y \in \mathbb{R} \mid (y - 1)(y + 2)(y - 3) = 0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 25 = 0\}$

31 Escreva dois números racionais que estão entre:

a) 0 e $\frac{3}{5}$ b) 1 e $\frac{9}{4}$ c) $-\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{5}$

32 Localize os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{7}$ na reta real.

Universidade Federal de Campina Grande

CONCLUSÃO

- Conceitos Omitidos
    - Número
    - Periodicidade
- Diagramas Inadequados
- Poucos exemplos, exercícios e demonstrações